Gestión y Planificación de Redes y Servicios
Área de Ingeniería Telemática

Diagramas de estados

Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación, 4º

Diagrama de transición de estados

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

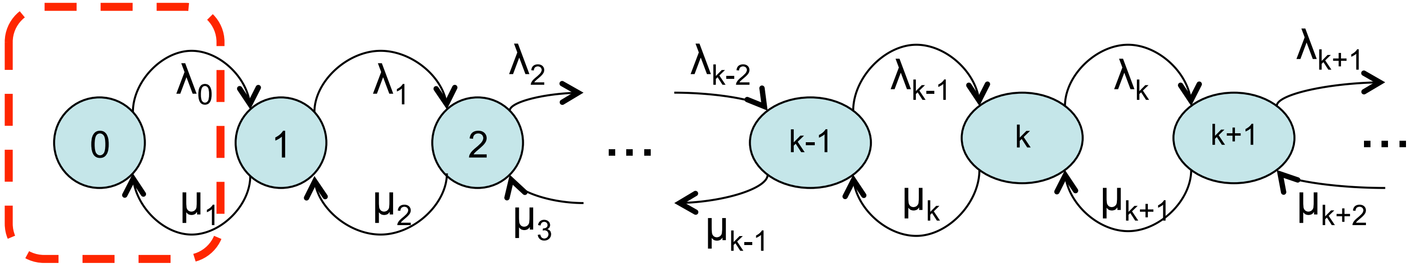
$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

- Reordenando quedan:

$$(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - Probabilidad de estar dentro x tasa de salida = Probabilidad de estar fuera x tasa de entrada
  - En este caso $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

  $0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

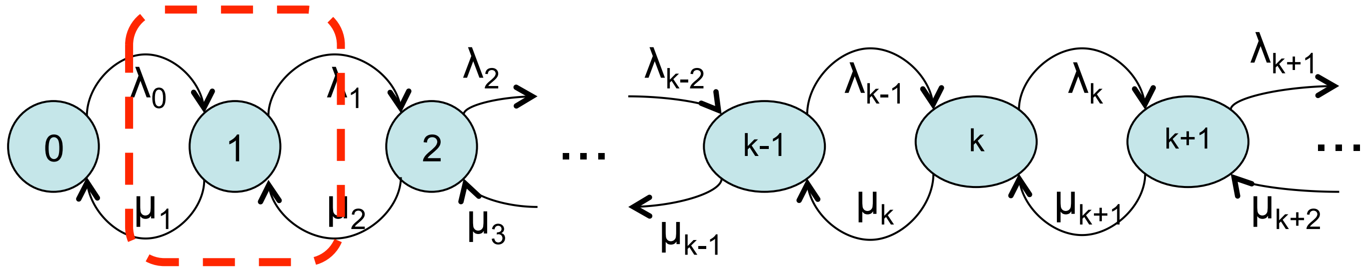
  $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$

- Reordenando quedan:

  $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - $(\lambda_1+\mu_1)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2$
  - Esto es $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ para k=1

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

  $0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

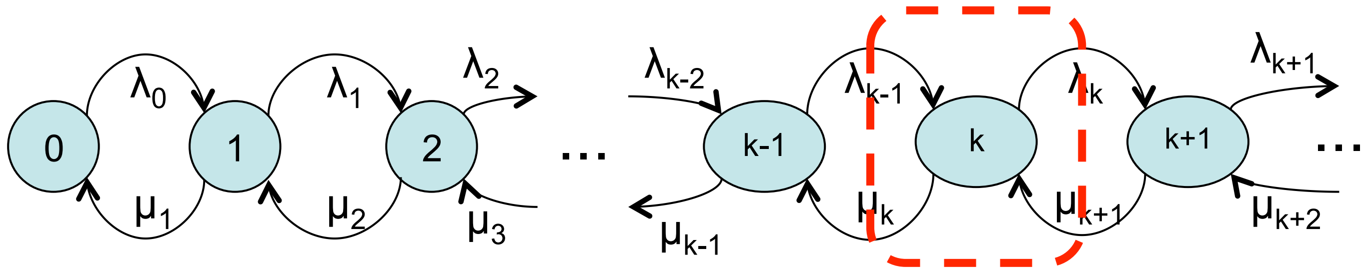
  $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$

- Reordenando quedan:

  $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

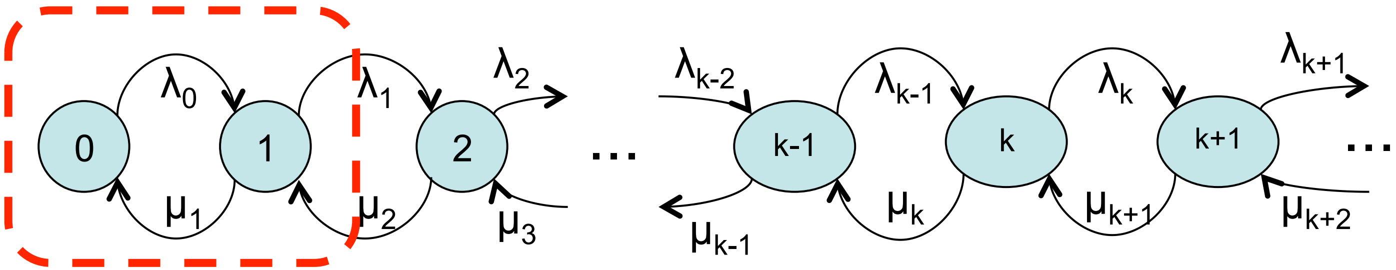
$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

- Reordenando quedan:

$$(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

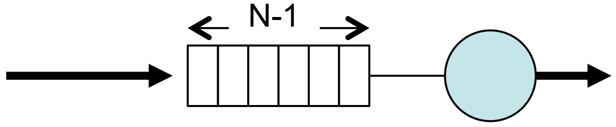
- Se representan mediante un diagrama de estados:



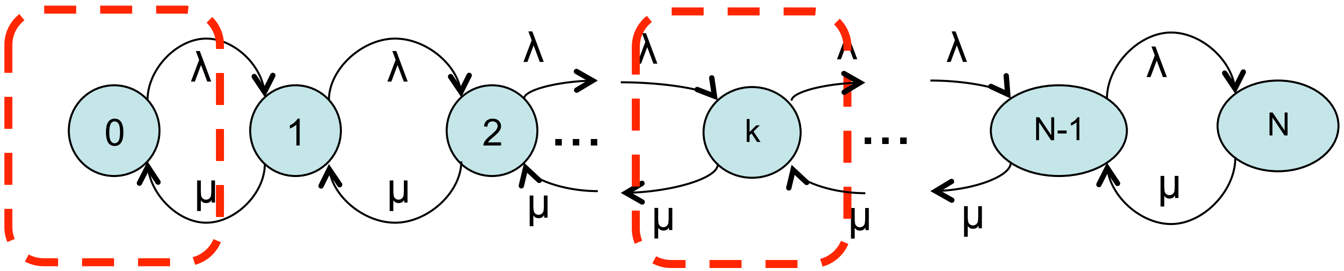
- Vale cualquier superficie:
  - $\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2$

Ejemplo: M/M/1/N

- El número máximo de clientes en el sistema es N



- Nos queda un diagrama como:



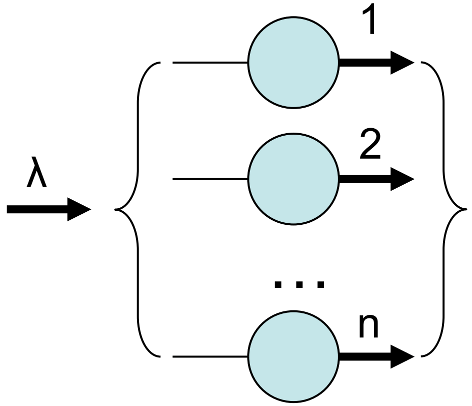
$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} \qquad N \geq k \geq 1$$

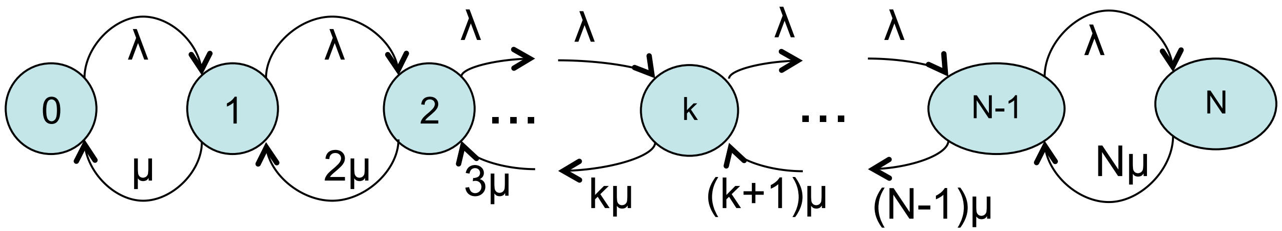
M/M/n/n

M/M/n/n

- n servidores sin cola
- Mientras todos los servidores están ocupados se rechazan llegadas



- Si hay k servidores ocupados con tiempos de servicio exponenciales entonces hay salidas a una tasa kμ



M/M/n/n

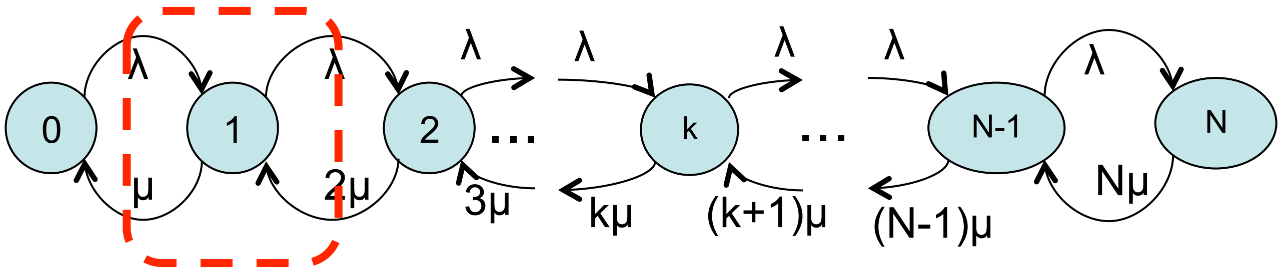
$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$(\lambda+k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \qquad N \geq k \geq 1$$

- Vemos que $p_1=p_0\lambda/\mu$

  k=1, $(\lambda+\mu)p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2$
- Sustituimos el valor de p_1 :

  $(\lambda+\mu)$ **$p_0\lambda/\mu$** $= \lambda p_0 + 2\mu p_2$
- Despejando p_2:

  $p_2 = \lambda^2/(2\mu^2)p_0$



M/M/n/n

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

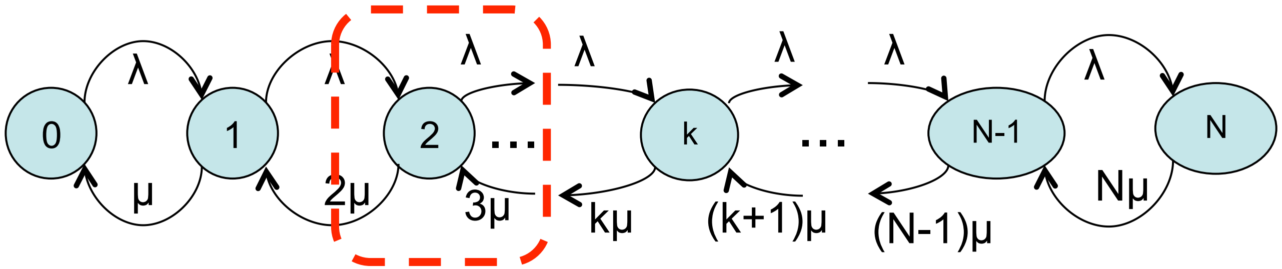
$$(\lambda+k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \qquad N \geq k \geq 1$$

- Vemos que $p_1=p_0\lambda/\mu$
- Vemos que $p_2 = \lambda^2/(2\mu^2)p_0$
- ¿p_3?

  k=2, $(\lambda+2\mu)p_2 = \lambda p_1 +3\mu p_3$
- Sustituimos los valores de p_1 y p_2:

  $(\lambda+2\mu)\ \lambda^2/(2\mu)p_0 = \lambda p_0\lambda/\mu +3\mu p_3$
- Despejando p_3:

  $p_3 = \lambda^3/(6\mu^3)p_0$



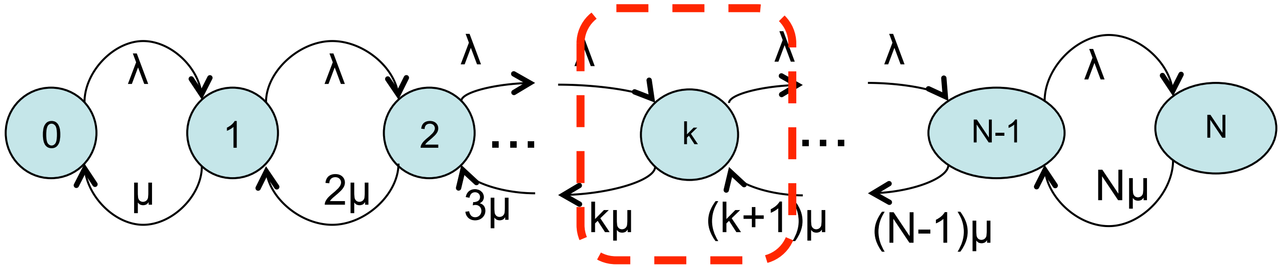
M/M/n/n

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \qquad N \geq k \geq 1$$

- Vemos que $p_1=p_0\lambda/\mu$
- Vemos que $p_2 = \lambda^2/(2\mu^2)p_0$
- Vemos que $p_3 = \lambda^3/(6\mu^3)p_0 = \lambda^3/(3!\ \mu^3)p_0$
- Si continuamos vemos que podemos generalizar a: $p_k = \lambda^k/(k!\mu^k)p_0$
- Y nos queda calcular p_0 con:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$



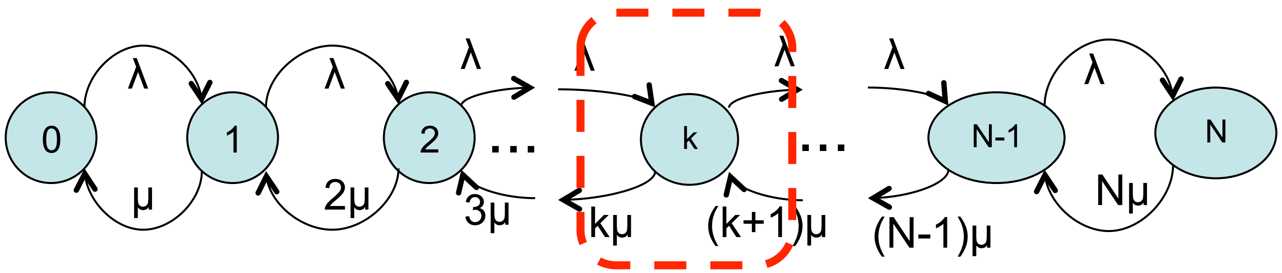
M/M/n/n

$\lambda p_0 = \mu p_1$

$(\lambda+k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}$ $\qquad$ $N \geq k \geq 1$

- Vemos que $p_1=p_0\lambda/\mu$
- Vemos que $p_2 = \lambda^2/(2\mu^2)p_0$
- Vemos que $p_3 = \lambda^3/(6\mu^3)p_0 = \lambda^3/(3!\ \mu^3)p_0$
- Si continuamos vemos que podemos generalizar a: $p_k = \lambda^k/(k!\mu^k)p_0$
- Y nos queda calcular p_0 con:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0 = 1 \qquad p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}}$$



M/M/n/n

- $p_k = \lambda^k/(k!\mu^k)p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}}$$

- Y así la probabilidad estacionaria es:
- (…)

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad 0 \le k \le n$$

M/M/n/n

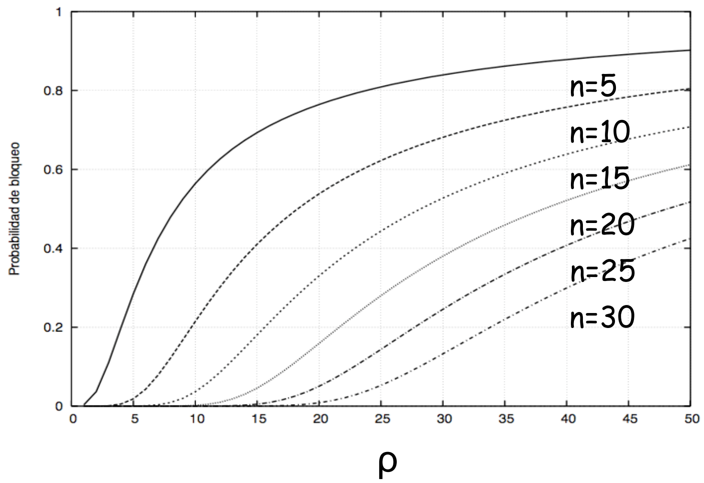
- Probabilidad estacionaria:

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad 0 \le k \le n$$

- Probabilidad de sistema lleno (y descartes ante llegadas) es p_n

$$p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}$$

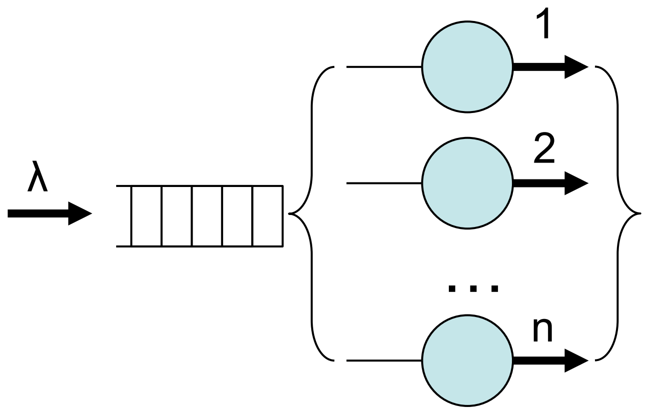
- Y por si a alguien aún no le suena, eso es la Erlang-B



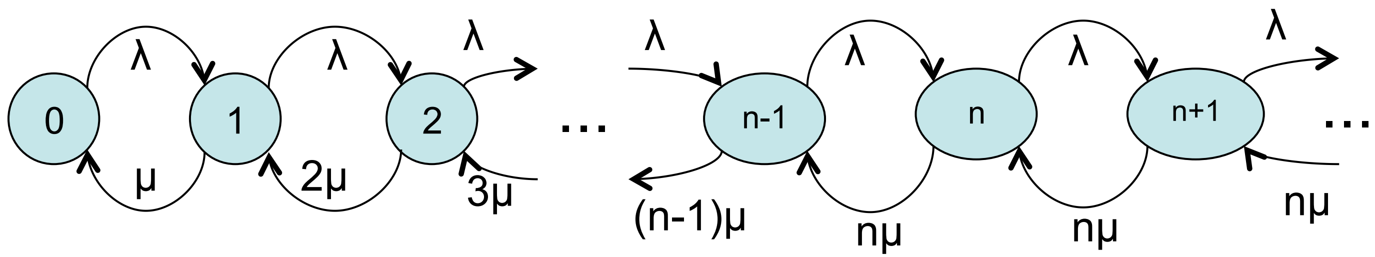
M/M/n/n

M/M/n

- Una cola compartida para n servidores
- Cuando queda un servidor libre atiende al primero de la cola



- Si hay k servidores ocupados con tiempos de servicio exponenciales entonces hay salidas a una tasa kμ
- Diagrama de estados: (lo dejamos sin resolver)



Otras preguntas

- ¿Y la evolución con el tiempo de las probabilidades de estado hasta estabilizarse?
- ¿El proceso de salida cómo es? ¿Es de Poisson?
- ¿Y la distribución del tiempo de espera?
- ¿Y si a continuación viene otra cola?
- ¿Y si el número de clientes es finito?
- ¿Y si los tiempos de servicio no son exponenciales?
- ¿Y si las llegadas no son de Poisson?
- ¿Y si puede haber realimentación?