

Procesos de Llegadas

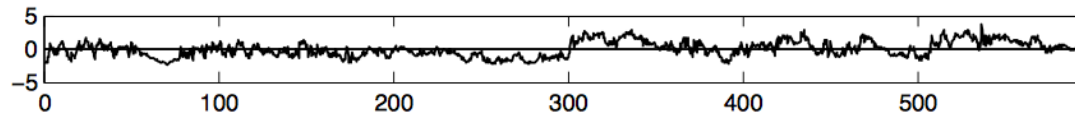
Area de Ingeniería Telemática
<http://www.tlm.unavarra.es>

Grado en Ingeniería en Tecnologías de
Telecomunicación, 4º

Tipos de procesos estocásticos

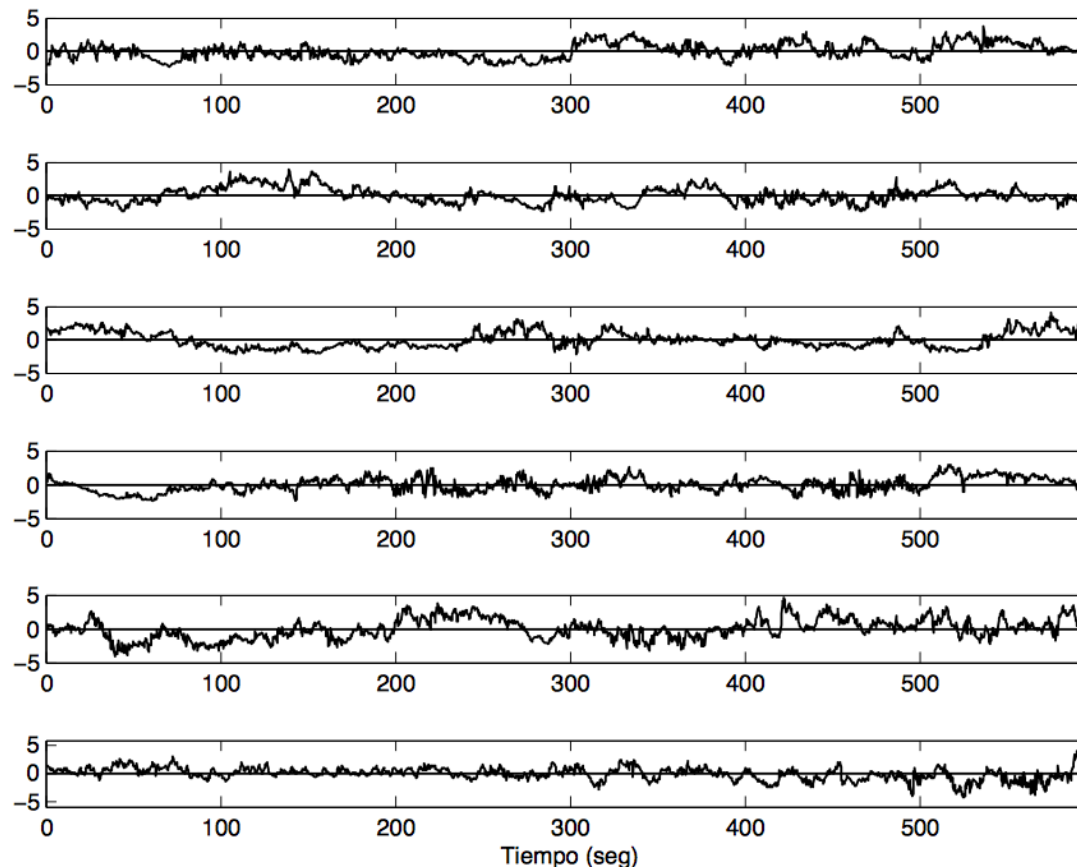
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias $\{X(\tau)\}$ indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Temperatura en una sala (...)



Proceso estocástico

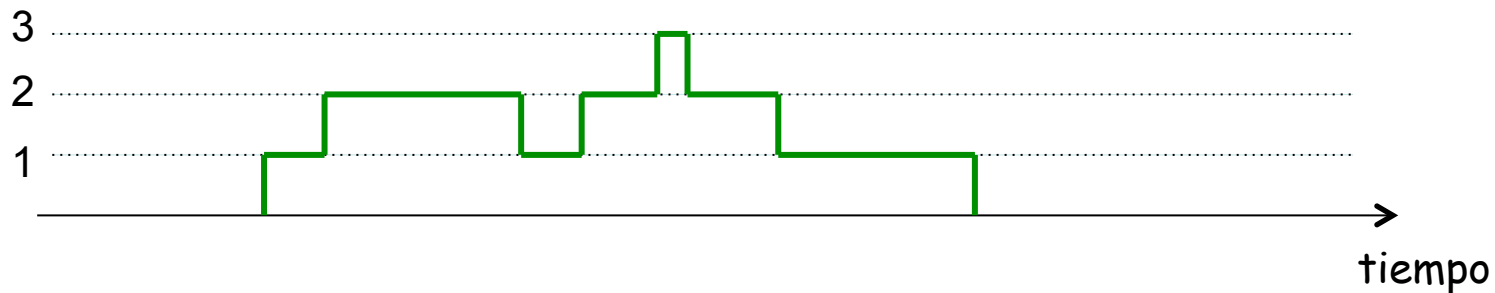
- Es una familia de variables aleatorias $\{X(\tau)\}$ indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Temperatura en una sala



Hay múltiples realizaciones posibles (funciones temporales)

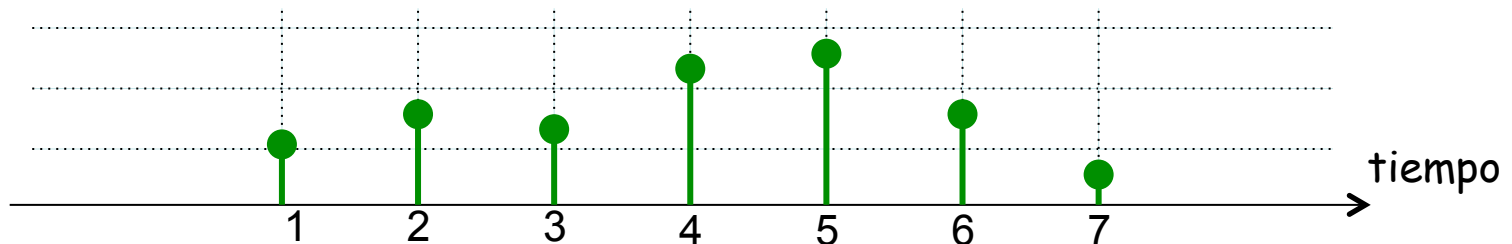
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias $\{X(\tau)\}$ indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Número de personas en un cine podría modelarse así
- Tipos: según los valores que toma $X(\tau)$, según los valores de la variable de tiempo y según las dependencias entre los $X(\tau)$



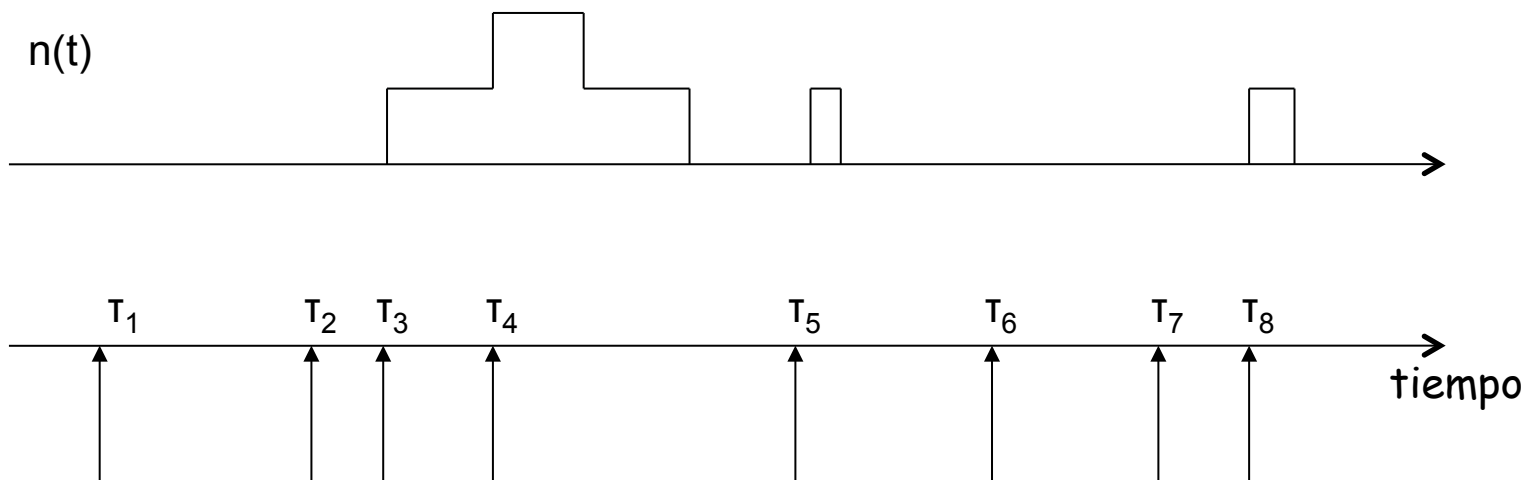
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias $\{X(\tau)\}$ indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Número de personas en un cine podría modelarse así
- Tipos
 - Estado discreto o continuo
 - “Estados” son los valores que toman los $X(\tau)$
 - Ejemplo: temperatura en la sala sería de estado continuo
 - Ejemplo: n° personas en cine sería de estado discreto
 - Los de estado discreto se suelen llamar “cadenas”
 - Tiempo discreto o continuo
 - Es continuo si el estado puede cambiar en cualquier instante de un intervalo de tiempo real (en discreto se suele usar X_n en vez de $X(\tau)$)
 - Ejemplo: ambos ejemplo anteriores serían de tiempo continuo
 - Ejemplo: cada día tomamos la temperatura de un paciente, sería de tiempo discreto (día 1, 2, 3, etc) y estado continuo



Proceso estocástico

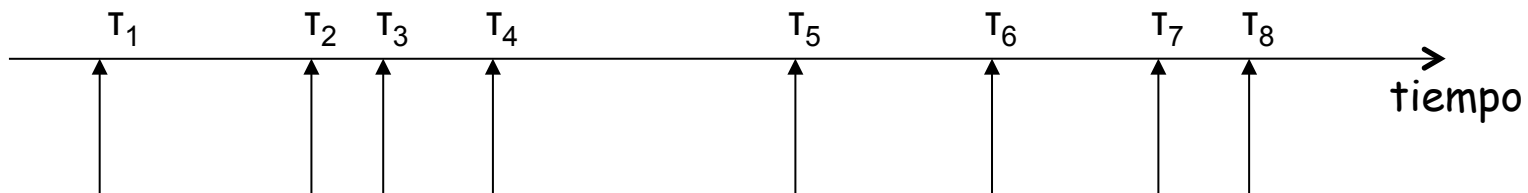
- Ejemplo: el número de clientes en cola forma un cadena de tiempo continuo $\{n(\tau)\}$
- Ejemplo: los instantes en que se producen unas llegadas forman un proceso de tiempo discreto $\{\tau_n\}$
- (No confundir con que esa variable dé valores que interpretemos como tiempo y por lo tanto sean continuos)



Procesos de llegadas

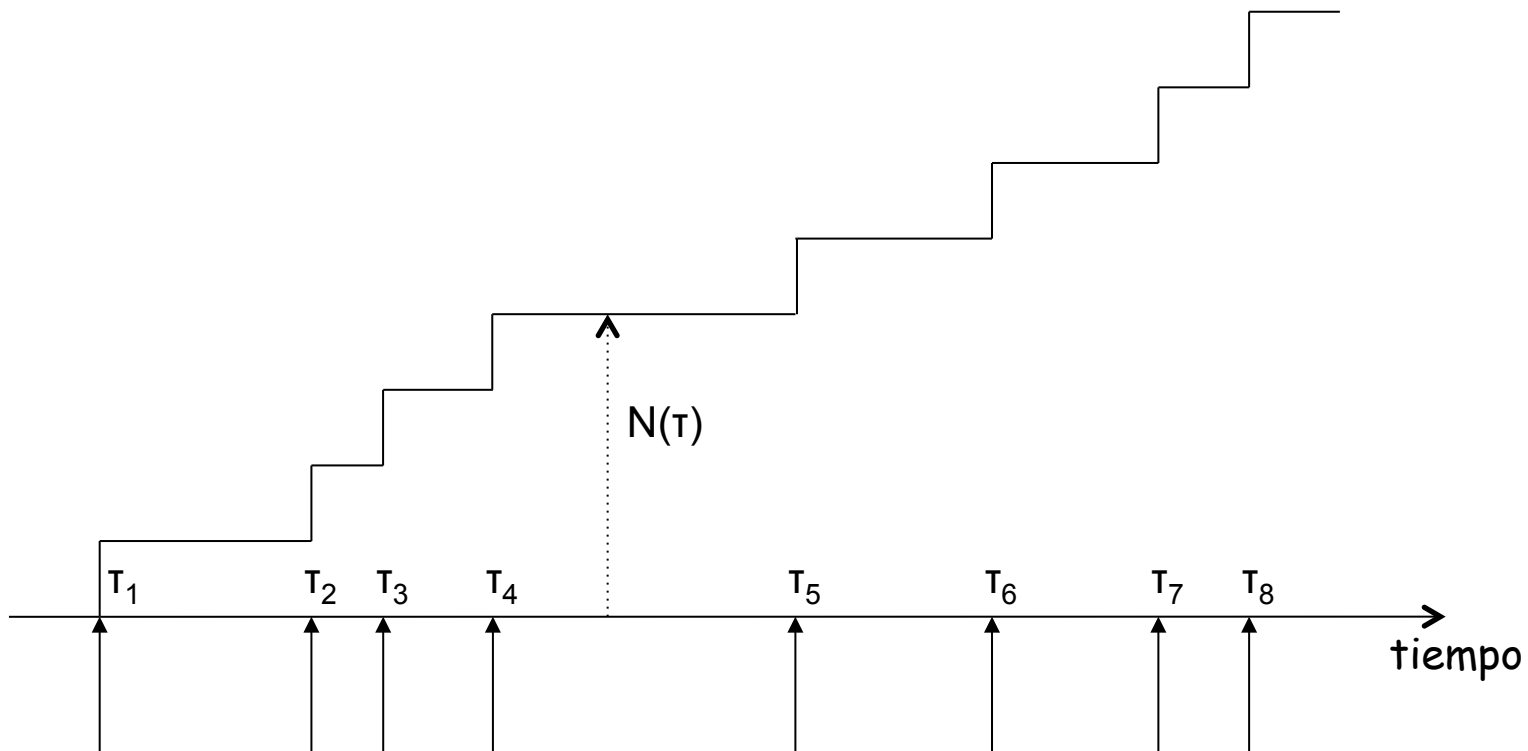
Proceso de llegadas

- *Arrival process*
- Es una secuencia de variables aleatorias $\{T_n\}$ crecientes
- Que sean crecientes quiere decir que el valor de una está condicionado a ser siempre mayor que el de la anterior
- Representan los instantes en que se produce algo (sean llegadas, salidas o lo que sea)
- No vamos a ver casos de múltiples llegadas simultáneas (*bulk arrivals*)



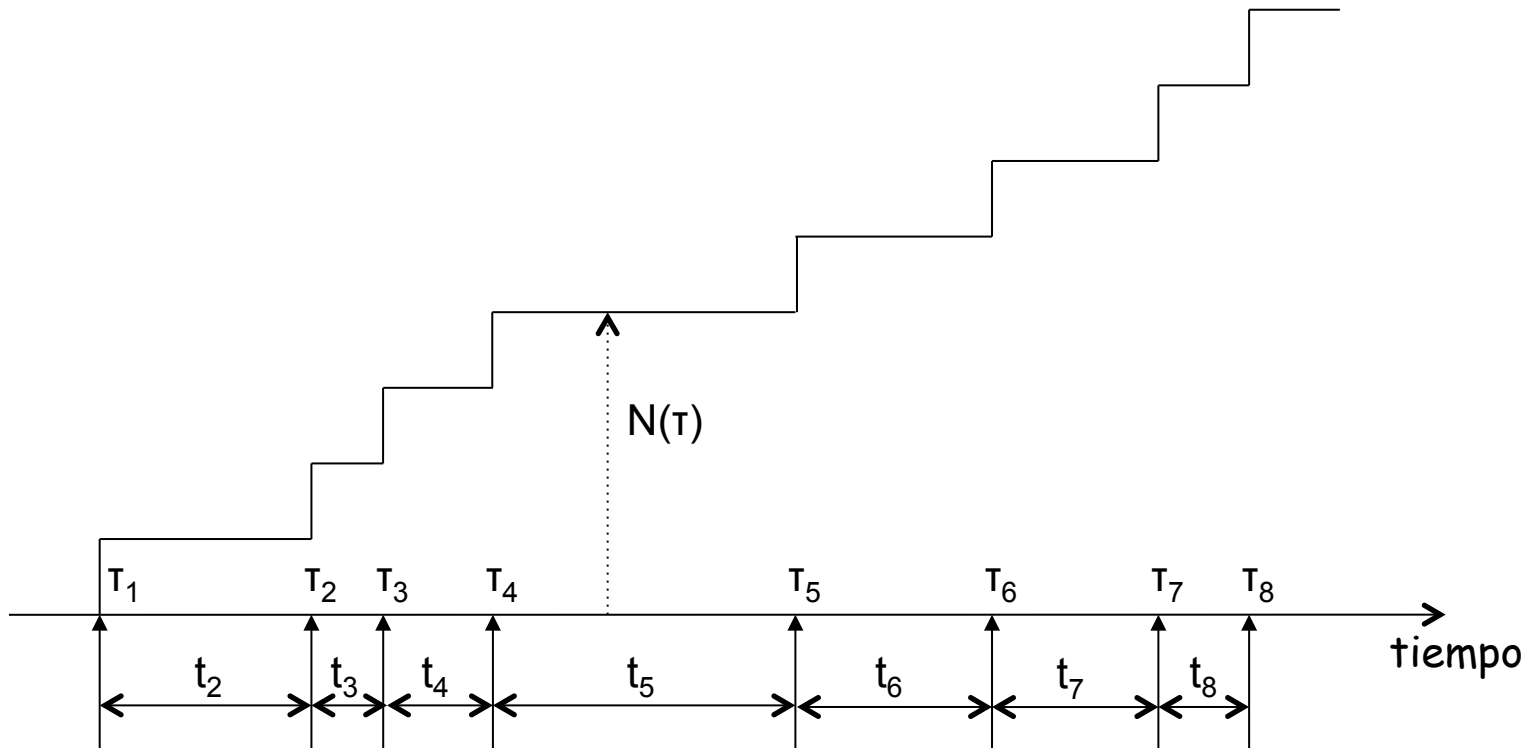
Proceso de cuenta de llegadas

- *Arrival counting process*
- Una representación alternativa al proceso de llegadas es $\{N(\tau)\}$ el número acumulado de llegadas en el intervalo $(0, \tau]$
- Este proceso es de tiempo continuo (número infinito no contable de variables aleatorias)



Proceso de cuenta de llegadas

- *Interarrival times*
- Otra representación alternativa es $\{t_n\}$ el tiempo entre dos llegadas consecutivas
- Este proceso es de tiempo discreto (número infinito pero contable de variables aleatorias)



Procesos de llegadas

- Habría que especificar la dependencia entre todas las variables mediante la función de distribución conjunta

$$P[X(\tau_1) \leq x_1, X(\tau_2) \leq x_2, \dots, X(\tau_n) \leq x_n]$$

- No vamos a estudiar todos los posibles procesos sino un subconjunto de ellos “sencillos” de analizar



Procesos de Markov y proceso de nacimiento puro

Procesos de Markov

- Habría que especificar la dependencia entre todas las variables mediante la función de distribución conjunta

$$P[X(\tau_1) \leq x_1, X(\tau_2) \leq x_2, \dots, X(\tau_n) \leq x_n]$$

- En 1907 A. A. Markov define un conjunto de procesos que se han venido a llamar “procesos de Markov” y “cadenas de Markov” (estado discreto)
- Son aquellos que cumplen que:

$$P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n, X(\tau_{n-1}) = x_n, \dots, X(\tau_1) \leq x_1] = P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n]$$

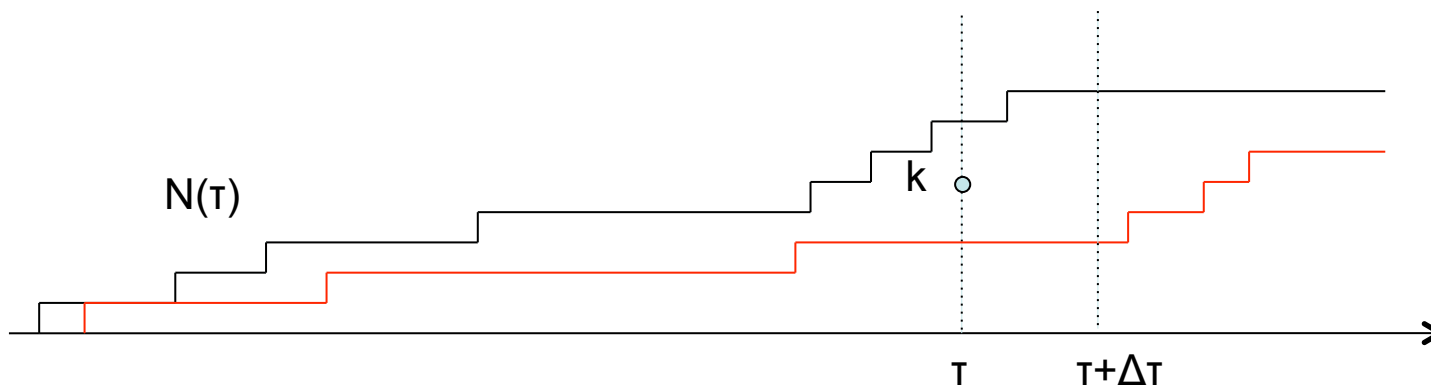
$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1}$$

- Es decir, el estado siguiente depende solo del estado anterior y no de toda la historia pasada
- Toda la historia se resume en el último estado observado
- Veamos un caso (...)



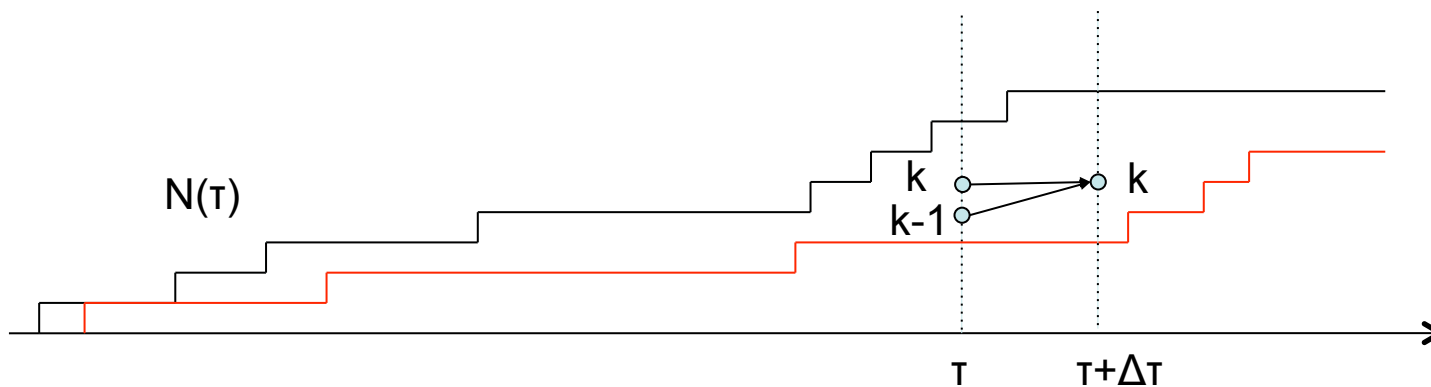
Proceso de nacimiento puro

- El estado es el número de clientes en el sistema
- Llegadas (nacimientos) independientes
- Supongamos que con Δt pequeño:
- $P[1 \text{ llegada en } (\tau, \tau + \Delta\tau) \mid k \text{ en el sistema}] = \lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- $P[0 \text{ llegadas en } (\tau, \tau + \Delta\tau) \mid k \text{ en el sistema}] = 1 - \lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- Def: $o(\Delta\tau)$ tiende a 0 “más rápido” que $\Delta\tau$, es decir $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} o(\Delta\tau)/\Delta\tau = 0$
- $P_k(\tau)$: probabilidad de encontrarse en el estado k en el instante τ
- $p_{j,k}(\tau, \tau + \Delta\tau)$: probabilidad de encontrarse en el estado k en instante $\tau + \Delta\tau$ dado que en el instante τ se encontraba en el estado j
- $p_{j,k}(\tau, \tau + \Delta\tau) = P[N(\tau + \Delta\tau) = k \mid N(\tau) = j]$
- $p_{j,k}(\tau, \tau + \Delta\tau) = p_{j,k}(\Delta\tau)$ si el proceso es homogéneo (no cambia su comportamiento con el tiempo)



Proceso de nacimiento puro

- $p_{j,k}(t, t+\Delta t) = p_{j,k}(\Delta t)$ si el proceso es homogéneo (no cambia su comportamiento con el tiempo)
- $P_k(t+\Delta t) = P_k(t)p_{k,k}(\Delta t) + P_{k-1}(t)p_{k-1,k}(\Delta t) =$
- $= P_k(t) (1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)) + P_{k-1}(t) (\lambda_{k-1} \Delta t + o(\Delta t)) =$
- $= P_k(t) - \lambda_k P_k(t) \Delta t + o(\Delta t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) \Delta t + o(\Delta t)$



Proceso de nacimiento puro

- $P_k(\tau + \Delta\tau) = P_k(\tau) - \lambda_k P_k(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- $P_k(\tau + \Delta\tau) - P_k(\tau) = -\lambda_k P_k(\tau)\Delta\tau + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$

$$\frac{P_k(\tau + \Delta\tau) - P_k(\tau)}{\Delta\tau} = -\lambda_k P_k(\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \quad k \geq 1$$

- Si $\Delta\tau \rightarrow 0$ entonces lo de la izquierda es la derivada y la $o(\Delta\tau)/\Delta\tau \rightarrow 0$:
 $dP_k(\tau)/d\tau = -\lambda_k P_k(\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau)$
- Con la salvedad de $k=0$ para el que no existe el estado $k-1$:
 $dP_0(\tau)/d\tau = -\lambda_0 P_0(\tau)$