

# Simulación (y 2)

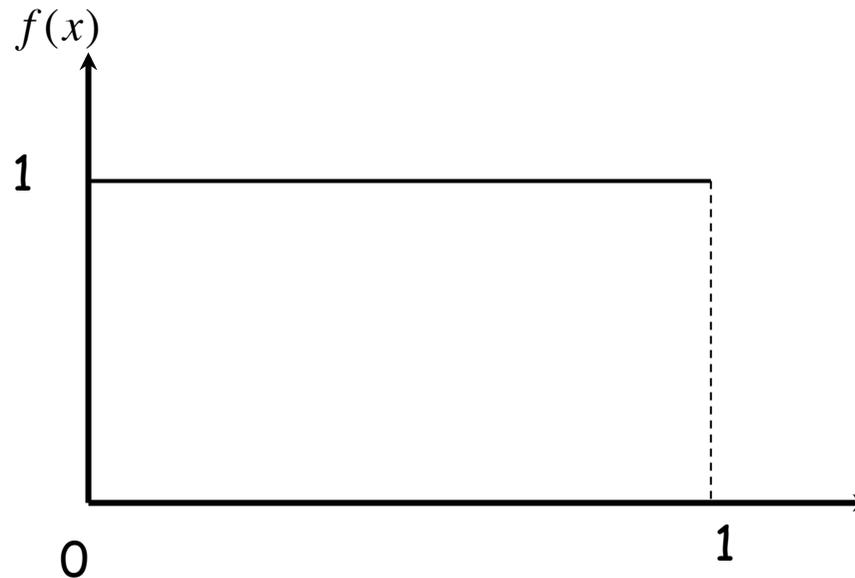
Area de Ingeniería Telemática  
<http://www.tlm.unavarra.es>

Grado en Ingeniería en Tecnologías de  
Telecomunicación, 4º

# Generación de números aleatorios

# Generación de números aleatorios

- Primero intentamos generar números aleatorios de una distribución uniforme
- Independientes
- Empleamos generadores de números pseudo-aleatorios (...)



# Números pseudo-aleatorios

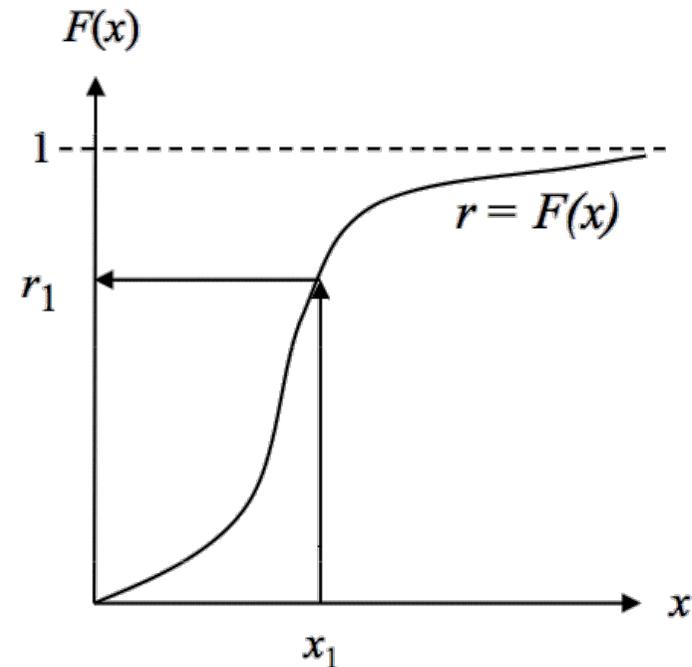
- Parece que fueran aleatorios
- Pero conocida la *semilla* se pueden predecir
- Incluso tienen un periodo
- Ejemplo: Linear Congruential Method

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m$$

- ¿Y para una distribución no uniforme?

# Inverse-transform Technique

- $X$  variable aleatoria deseada
- $F(x) = P[X < x]$
- $U$  variable aleatoria uniforme en  $[0, 1]$
- Se genera una muestra  $r_1$  de  $U$
- Se obtiene mediante la inversa de  $F(x)$  :  $x_1 = F^{-1}(r_1)$
- $x_1$  es una muestra de la variable aleatoria  $X$
- Esto es más sencillo si  $F(x)$  tiene una inversa “simple”



# Ejemplo: Distribución exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$R = 1 - e^{-\lambda X}$$

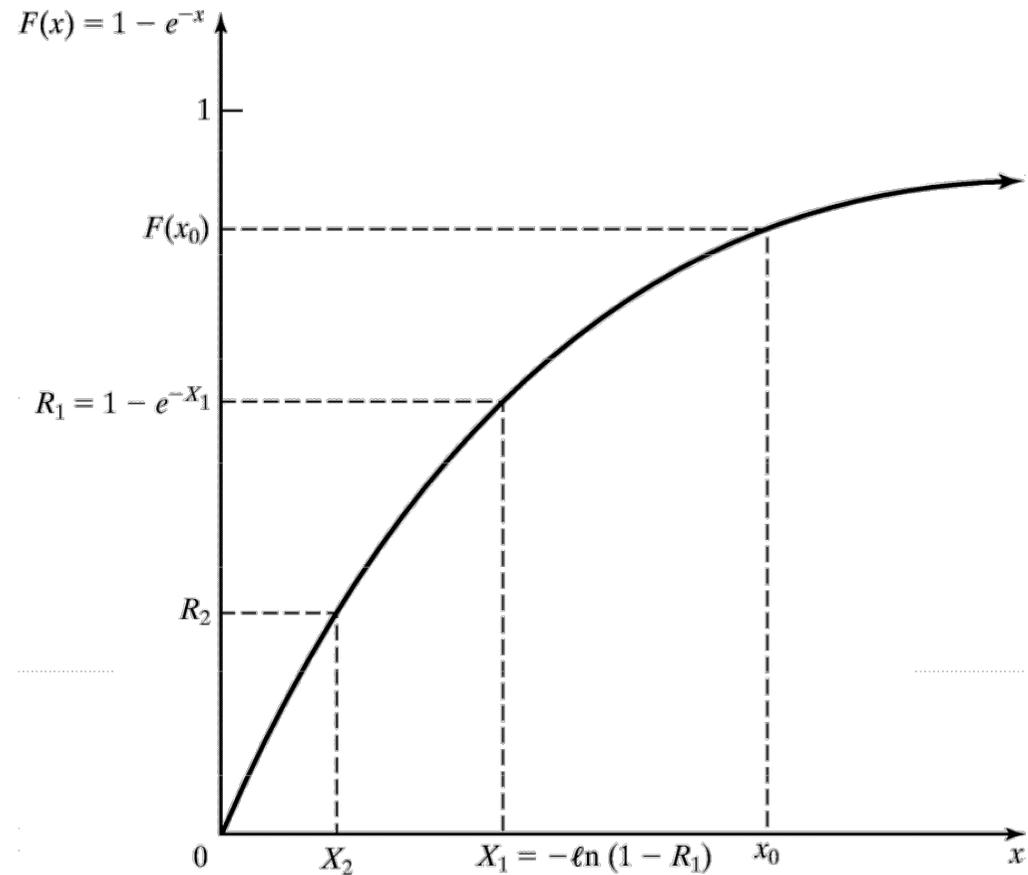
$$1 - R = e^{-\lambda X}$$

$$\ln(1 - R) = -\lambda X$$

$$X = -\frac{\ln(1 - R)}{\lambda} = F^{-1}(R)$$

ó

$$X = -\frac{\ln(R)}{\lambda} = F^{-1}(R)$$



(Tanto  $R$  como  $1-R$  son variables aleatorias uniformes)

# Inverse-transform Technique

- Distribuciones “sencillas”: Triangular, Weibull, Pareto
- $F(x)$  podría venir de una aproximación con datos experimentales
- Entonces se podría emplear interpolación para mejorar el resultado
- Para una variable aleatoria discreta es suficiente con una tabla
- “Difíciles”: Gamma, Normal, Beta
- Se tienen que emplear aproximaciones a  $F(x)$  o a  $F^{-1}(x)$

# Técnicas a partir de propiedades

## Ejemplo: Gaussian distribution

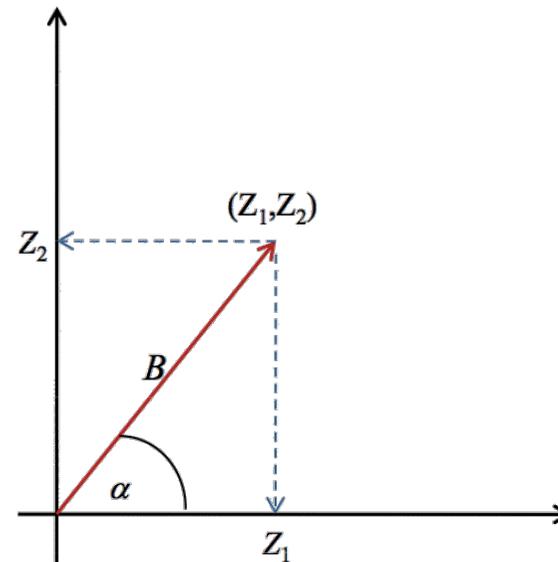
- $Z_1$  y  $Z_2$  variables aleatorias  $N(0,1)$
- Supongamos que son coordenadas rectangulares de un punto  $(Z_1, Z_2)$
- En coordenadas polares: 
$$\begin{cases} Z_1 = B \cos(\alpha) \\ Z_2 = B \sin(\alpha) \end{cases}$$
- El radio  $B$  es una variable aleatoria exponencial
- El ángulo  $\alpha$  es una variable aleatoria uniforme
- Son independientes
- Así que se pueden obtener dos muestras de  $N(0,1)$  con dos muestras de una variable aleatoria uniforme

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln(R_1)} \cos(2\pi R_2)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln(R_1)} \sin(2\pi R_2)$$

- Y para  $Y = N(\mu, \sigma)$  :

$$Y = \mu + \sigma Z_i$$



# Simulación de eventos discretos

# Simulación de eventos discretos

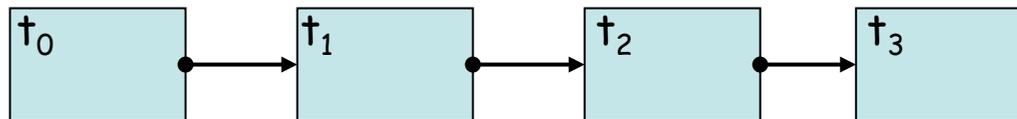
- Modelado con el tiempo de un sistema en el que todos los cambios de estado se producen en un conjunto discreto de puntos en el tiempo
- Empleo de métodos numéricos
  - En vez de métodos analíticos
  - El modelo se “corre” en vez de se “resuelve”
- Se lleva a cabo produciendo una secuencia de *snapshots* del sistema con el tiempo
- El *snapshot* en un instante  $t$  incluye
  - El estado del sistema en el instante  $t$
  - Una lista de las actividades en progreso y cuándo terminarán
  - El estado de todas las entidades
  - Los valores de todos los contadores estadísticos

# Future (pending) Events List (FEL)

- Es el mecanismo para hacer avanzar la simulación
- La FEL contiene los eventos planificados para este instante o posteriores aún sin procesar
- Cada evento contiene el instante de tiempo en que sucede
- Ordenados por instante de tiempo de menor a mayor
- Garantiza que los eventos tienen lugar en orden cronológico

## Gestión de actividades con una FEL

- La duración se conoce al comenzar (determinista o aleatoria)
- En algunos entornos existe la posibilidad de cancelar
- Al comenzar la actividad se introduce un evento de finalización de la actividad en la FEL
- Ejemplo: Nueva llegada, actividad el tiempo hasta la siguiente (...)



CLOCK = t < t<sub>0</sub>

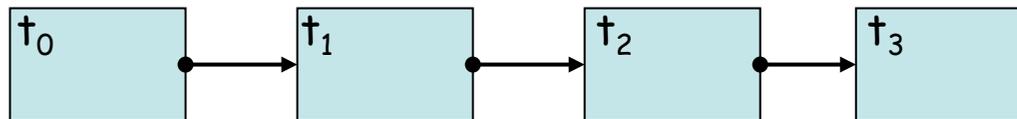
$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$$

# Información fundamental a definir

- ¿Efectos de cada tipo de evento?
  - Cambios de estado
  - Cambios de atributos de entidades
- ¿Cómo se definen las actividades?
  - Deterministas, probabilísticas, ecuaciones
  - Qué tipo de evento marca su principio/final
  - Su comienzo es condicional al estado
- ¿Cómo comienza la simulación?
  - Primeros eventos
- ¿Cuándo finaliza la simulación? (vemos más adelante)

# Avance de la simulación

- *Snapshots* del sistema con el tiempo
- *Snapshot* incluye el estado del sistema y la FEL
- Esa FEL contiene las actividades en progreso y cuándo finalizan
- CLOCK = t = instante actual en la simulación
- Evento en  $t_0$  = Evento inminente
- Se actualiza CLOCK =  $t_0$
- Se retira el evento inminente de la FEL
- Se “ejecuta” el evento
- Eso crea un nuevo *snapshot* del sistema



CLOCK = t <  $t_0$

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$$

# Event-scheduling/Time-advance

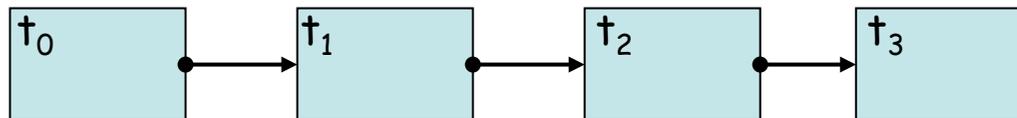
Mientras queden eventos en la FEL

Retirar el primero (evento inminente)

Avanzar la variable de CLOCK hasta el instante del evento

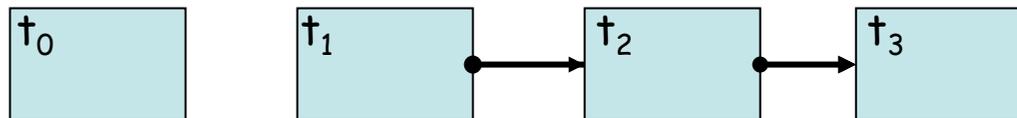
Procesar el evento: puede modificar el estado del sistema e introducir otros eventos futuros en la FEL manteniéndola ordenada

Actualizar los contadores y estadísticos



# Ejemplo: Avance con llegadas

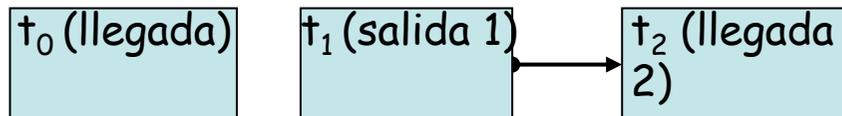
- Evento inicial: una llegada
- Se procesa
  - Introduce eventos consecuencia de ella (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada (...)



# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inicial: llegada del primer cliente ( $t_0$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_1$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t_2$ ) (...)



CLOCK =  $t_0$

# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inminente: salida del primer cliente ( $t_1$ )
- Se procesa:
  - Actualización de estadísticas

$t_0$  (llegada)

$t_1$  (salida 1)

$t_2$  (llegada  
2)

CLOCK =  $t_1$

# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inminente: llegada del segundo cliente ( $t_2$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_3$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t'_2$ ) (...)

$t_0$  (llegada)

$t_1$  (salida 1)

$t_2$  (llegada  
2)

$t_3$  (salida 2)



CLOCK =  $t_2$

# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inminente: llegada del segundo cliente ( $t_2$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_3$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t'_2$ ) (...)

$t_0$  (llegada)

$t_1$  (salida 1)

$t_2$  (llegada  
2)

$t'_2$  (llegada  
3)

$t_3$  (salida 2)

CLOCK =  $t_2$



# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inminente: llegada del tercer cliente ( $t'_2$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_4$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t''_2$ ) (...)

$t_0$  (llegada)

$t_1$  (salida 1)

$t_2$  (llegada  
2)

$t'_2$  (llegada  
3)

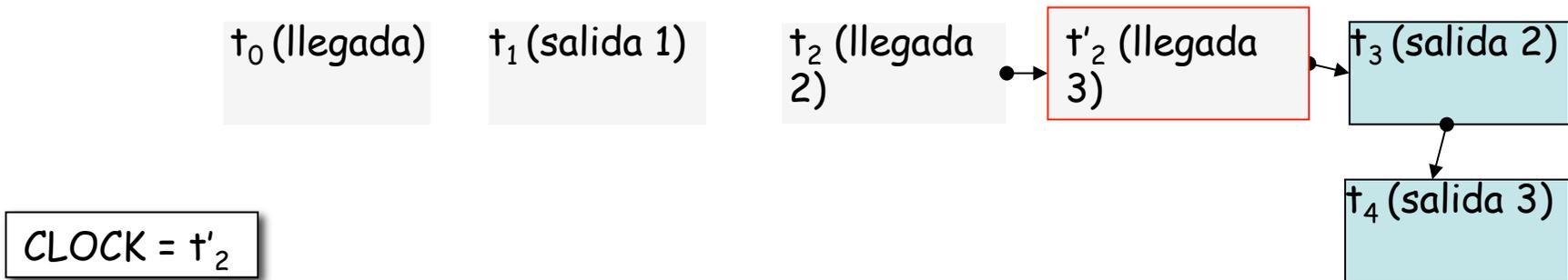
$t_3$  (salida 2)

CLOCK =  $t'_2$

# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

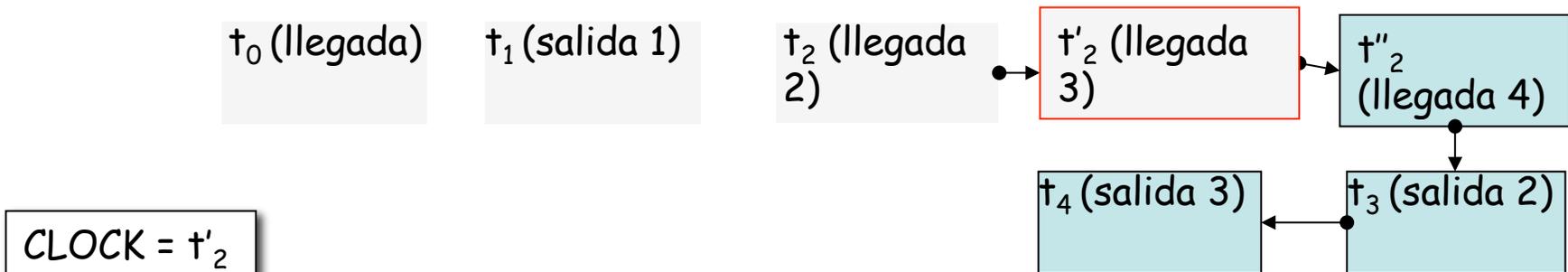
- Evento inminente: llegada del tercer cliente ( $t'_2$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_4$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t''_2$ ) (...)



# Ejemplo: Avance con llegadas

## Ejemplo: uso de un cajero automático

- Evento inminente: llegada del tercer cliente ( $t'_2$ )
- Se procesa:
  - Introduce eventos consecuencia de ella: evento de cuándo termina de usar el cajero ( $t_4$ ) (...)
  - Se introduce un nuevo evento que es la siguiente llegada ( $t''_2$ ) (...)



# ¿ Fin de la simulación ?

- Cuando no queden eventos en la FEL
- En la inicialización introducir un evento futuro de finalización
  - Limita el tiempo simulado
  - No limita el tiempo real
- Detenerla al alcanzar una duración (tiempo real)
- Detenerla al alcanzar unas medidas una cierta precisión.

# Gestión de la FEL

- Su longitud cambia durante toda la simulación
- Su gestión eficiente es vital
- Operaciones más frecuentes:
  - Retirar el primero
  - Insertar manteniendo el orden
- Puede soportar el eliminar un evento en concreto

# Simulation Tools

- Librerías de utilidades
- Simuladores programables
- Simuladores controlables (gráfico, script)
- Simuladores de redes (ns2, OMNeT++, SSFNet, Parsec, Qualnet, OPNET, JiST/SWANS ...)