Sistemas con cola

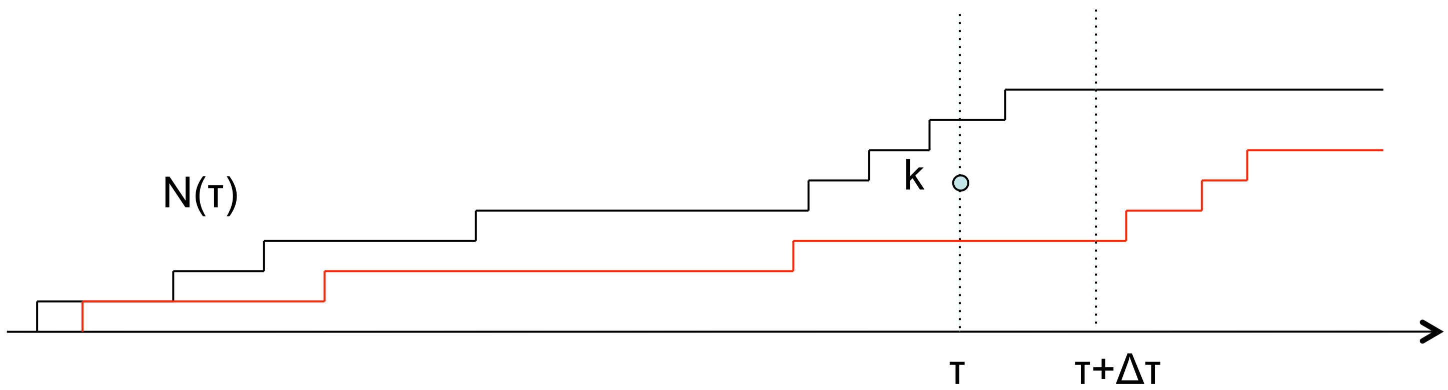
Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación, 4º

Hemos visto

Proceso de nacimiento puro

- El estado es el número de clientes en el sistema
- Llegadas (nacimientos) independientes
- Supongamos que con Δt pequeño:
- P[1 llegada en (τ, τ+Δτ) | k en el sistema] = $\lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- P[0 llegadas en (τ, τ+Δτ) | k en el sistema] = $1 - \lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$



Comportamiento de cola

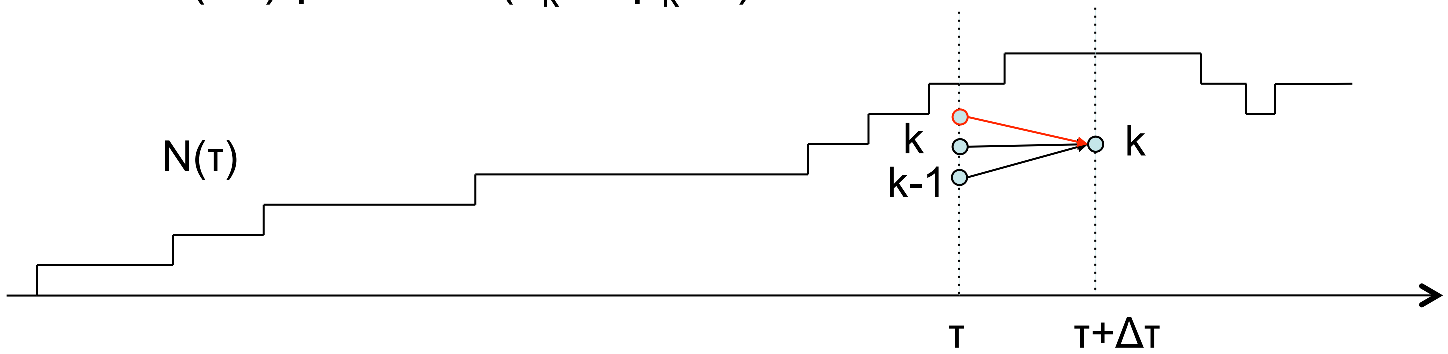
- Ahora no solo hay "nacimientos" sino también "muertes"
- El estado es el número de clientes en el sistema (Markoviano)

  P[1 llegada en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $\lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$

  P[0 llegadas en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $1 - \lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$

  P[1 salida en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $\mu_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$

  P[0 salidas en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $1 - \mu_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- Si miramos solo las llegadas forman un proceso de Poisson
- Y tal y como hemos planteado las salida implica que **el tiempo de servicio es exponencial** con parámetro μ_k
- Ahora debemos contar la transición de una salida
- Una entrada simultánea a una salida tiene probabilidad de orden $o(\Delta\tau)$ pues es $(\lambda_k \Delta\tau \; \mu_k \Delta\tau)$



Comportamiento de cola

- Siguiendo un razonamiento similar al que hicimos antes llegamos a:

$$dP_k(\tau)/d\tau = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(\tau) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(\tau) + \mu_{k+1}P_{k+1}(\tau) \qquad k\geq 1$$
$$dP_0(\tau)/d\tau = -\lambda_0 P_0(\tau) + \lambda_1 P_1(\tau)$$

- Ecuaciones diferenciales en diferencias
- Representan la dinámica del sistema
- Vamos a ignorar el transitorio y preguntarnos si esas $P_k(\tau)$ se estabilizan
- Si es así existirán $p_k \equiv \lim_{\tau\to\infty} P_k(\tau)$
- Y se darán cuando las derivadas frente al tiempo se anulen
- Es decir:

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$
$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

- Siendo por supuesto: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Sistema M/M/1

- Vamos a resolver para $\lambda_k=\lambda$, $\mu_k=\mu$

  $0 = -(\lambda+\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$ $\quad k\geq 1$

  $0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$
- Vemos que $p_1=p_0\lambda/\mu$
- Sustituimos en la primera para k=1 y queda:
- $0 = -(\lambda+\mu)\, p_0\lambda/\mu + \lambda p_0 + \mu p_2$
- Y despejando $p_2=p_0(\lambda/\mu)^2$
- Continuando llegamos a $p_k = p_0(\lambda/\mu)^k = p_0\rho^k$ $\quad \rho=\lambda/\mu$
- Para calcular p_0 recurrimos a que: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_0\rho^k = p_0\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k} = \frac{1}{1+\frac{\rho}{1-\rho}} = 1-\rho$$

$\boxed{\rho < 1}$

Sistema M/M/1

$p_0 = 1 - \rho$

- Y con eso $p_k = p_0(\lambda/\mu)^k = (1 - \rho)\,\rho^k$
- Así pues:

  $p_k = (1 - \rho)\,\rho^k \qquad k \geq 0$
- No es más que la distribución geométrica
- Da la probabilidad estacionaria de encontrar k clientes en el sistema
- No depende de λ y μ sino de su cociente ρ
- Podemos calcular el número medio de clientes en el sistema:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + \ldots) = (1-\rho)\rho(1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + \ldots) =$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho} = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\boxed{N = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

Sistema M/M/1

$$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Empleando Little, N = λS, con lo que el tiempo medio en el sistema:

$$S = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

- El tiempo medio de espera en cola será W = S – 1/μ , es decir:

$$W = \frac{1/\mu}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

- Y el número medio de cliente en cola será (Little) $N_q = \lambda W$

$$N_q = \lambda W = \lambda \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Que evidentemente es:

$$N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho-\rho+\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho-\rho(1-\rho)}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = N - \rho$$

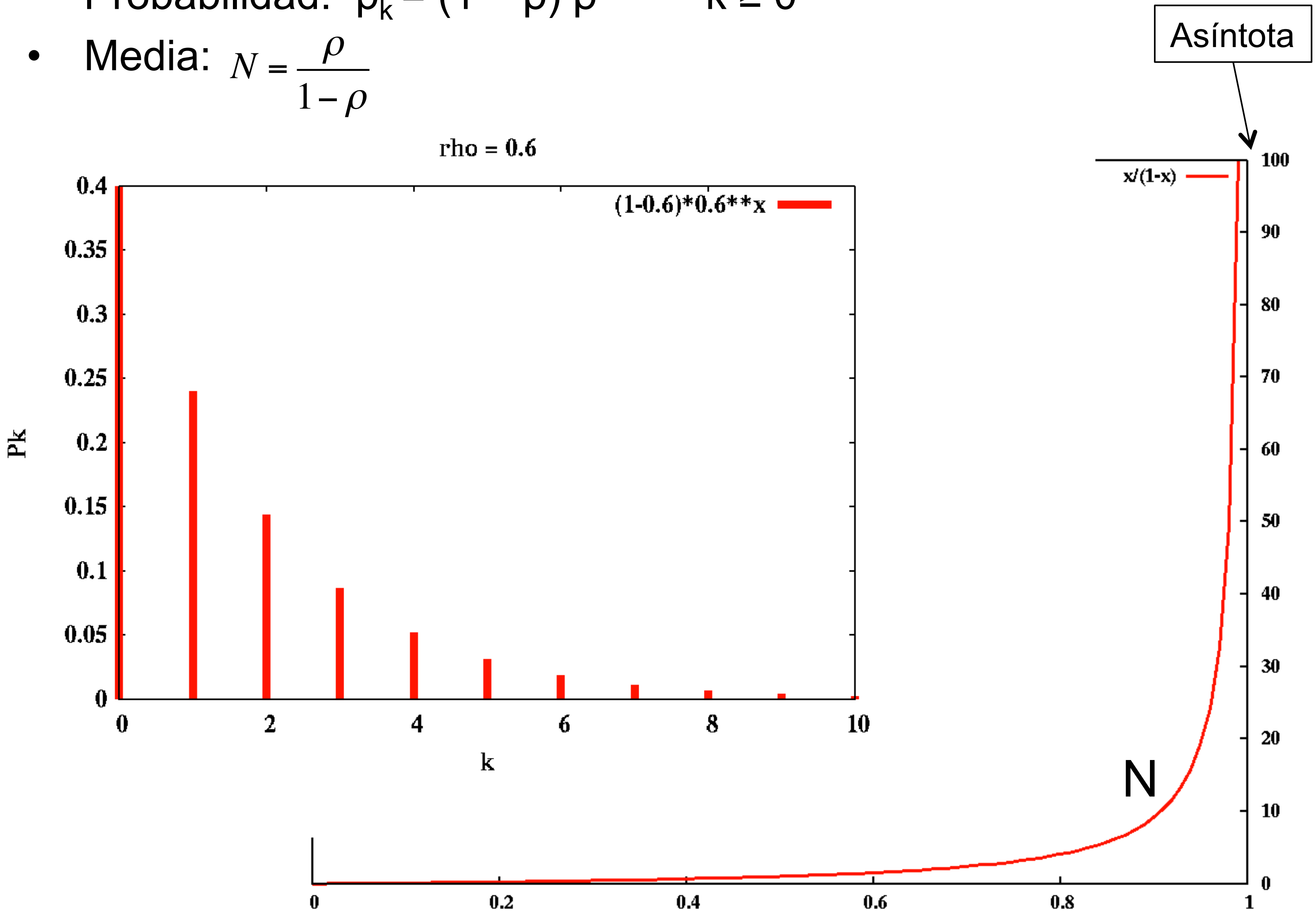
$$N_q = N - \rho$$

Sistema M/M/1

- Resumiendo:
  - Número medio de clientes en el sistema (cola+servidor) $$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$
  - Número medio de cliente en la cola $$N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$
  - Número medio de clientes en el servidor $$N_s = \rho$$
  - Tiempo medio de espera en el sistema (cola+servidor) $$S = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$
  - Tiempo medio de espera en la cola $$W = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$
  - Tiempo medio de espera en el servidor es simplemente 1/μ

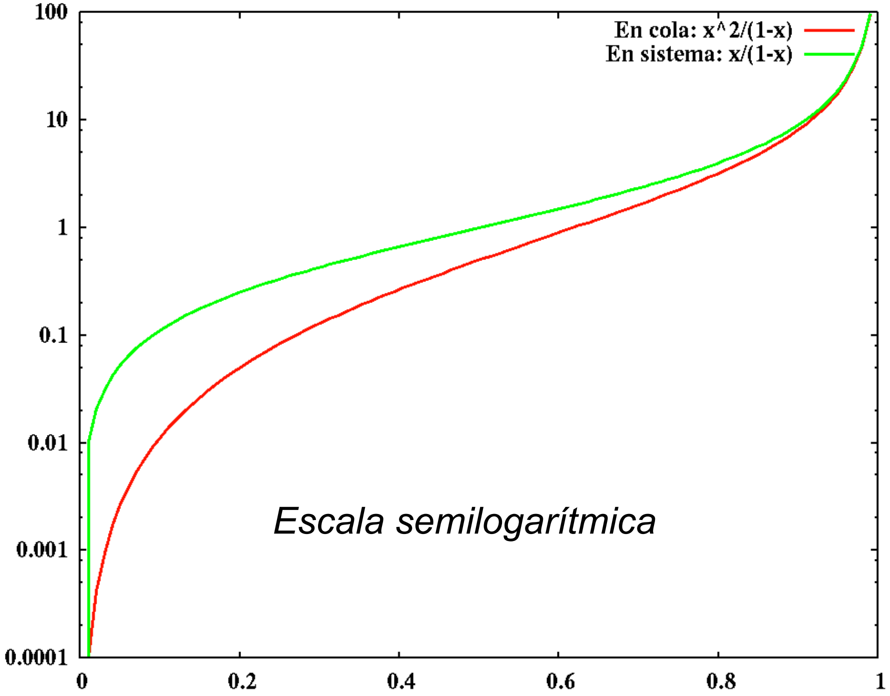
M/M/1 : Clientes en sistema

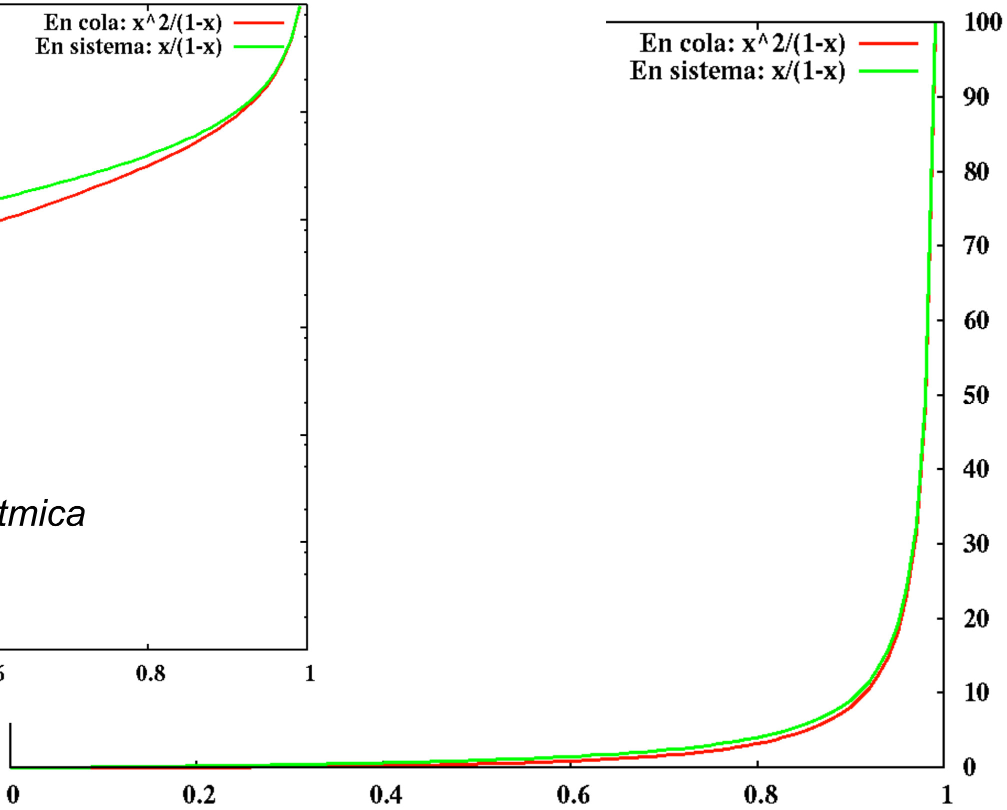
- Probabilidad: $p_k = (1 - \rho)\,\rho^k \qquad k \geq 0$
- Media: $N = \dfrac{\rho}{1-\rho}$



M/M/1: Clientes en cola

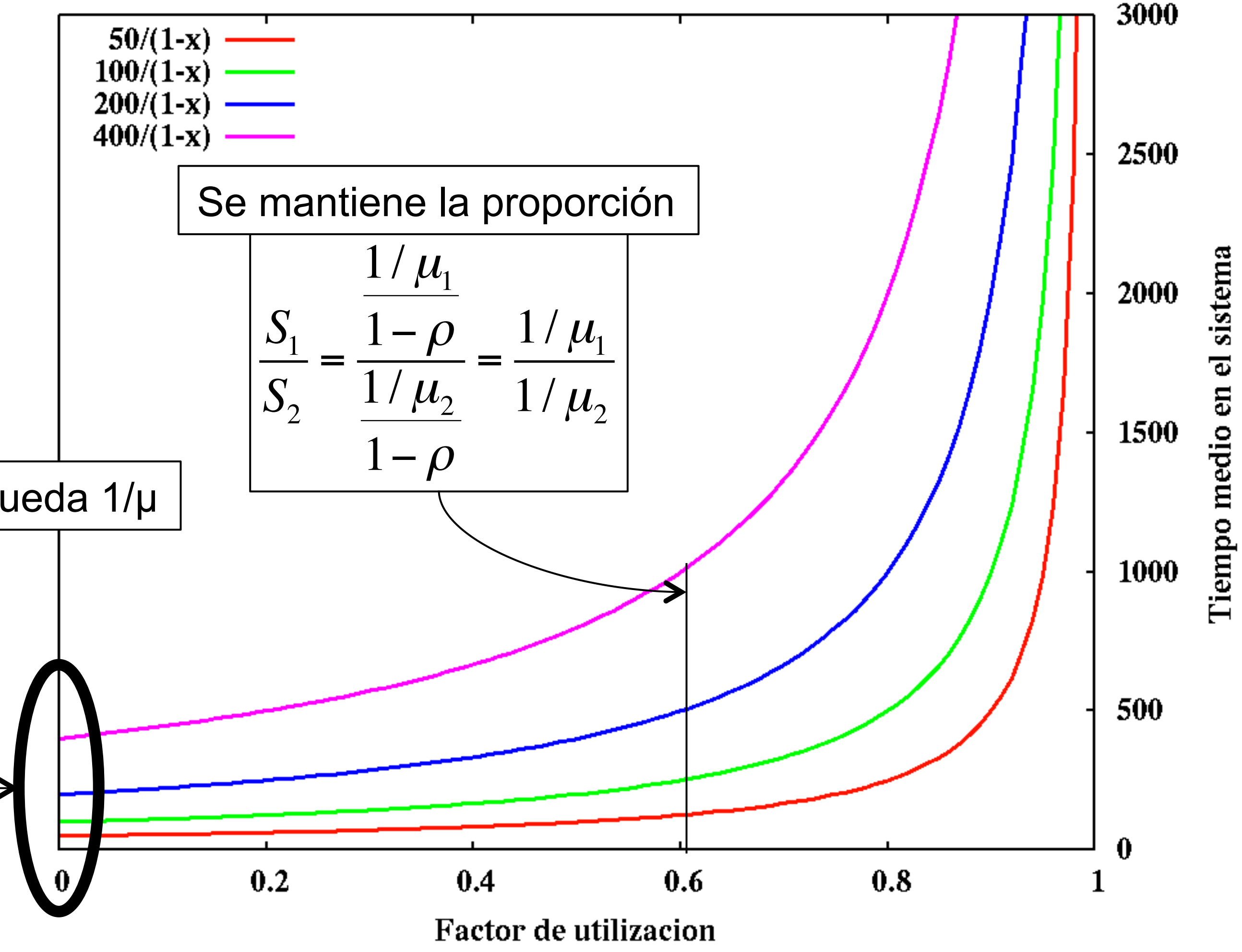
- Media en cola: $N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Media en el sistema era: $N = \frac{\rho}{1-\rho}$
- La diferencia es solo ρ





M/M/1 : Espera en sistema

- Veamos el cambio para diferentes tiempos medios de servicio
- Media: $S = \dfrac{1/\mu}{1-\rho}$



Se mantiene la proporción

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{1/\mu_1}{1-\rho}}{\dfrac{1/\mu_2}{1-\rho}} = \frac{1/\mu_1}{1/\mu_2}$$

Para ρ➔0 queda 1/μ

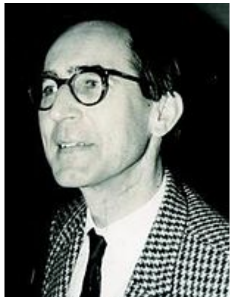
M/M/1 otro cálculo de S

- Otra forma de calcular el tiempo medio en el sistema
- Tiempo medio de servicio $1/\mu$
- Supongamos una llegada
- El tiempo medio en el sistema será la suma de (*):
  - El tiempo medio de servir a todos los que hay en el sistema
    - Supongamos que hay N clientes en el sistema
    - Tardan N/μ en salir del sistema (**)
  - El tiempo medio de servir a esta llegada
- Suman $S = N/\mu + 1/\mu$
- Y por Little Sabemos que $N = \lambda S$
- Luego $S = \lambda S/\mu + 1/\mu = \rho S + 1/\mu$
- Y despejando

$$S = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

- (*) gracias a que las llegadas sean de Poisson y (**) a que los tiempos de servicio no tengan memoria

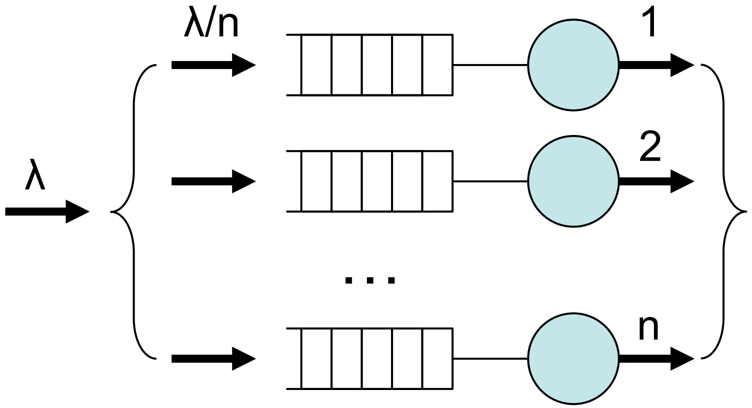
Sistema ¿"M/M/1"?



- Notación de Kendall
- A/S/c/K/N/D
- A : Describe los tiempos entre llegadas
  - M : i.i.d. exponenciales (Poisson)
  - D : deterministas (siempre el mismo valor)
  - G : distribución general (suelen ser i.i.d. aunque algunos ponen GI para indicarlo expresamente)
- S : Describe los tiempos de servicio
  - Mismos casos que para A (en este caso M son tiempos de servicio exp.)
- c : Número de servidores
- K : Capacidad máxima del sistema (clientes), igual a la capacidad máxima de la cola + c
- N : Tamaño de la población (número máximo de clientes existente, pueden salir y volver a entrar)
- D : La disciplina de cola (FIFO/LIFO/PS, etc)

Servidores en paralelo

- Llegadas se reparten entre n servidores (colas infinitas)
- Reparto tal que cada un atiende a un proceso de Poisson λ/n



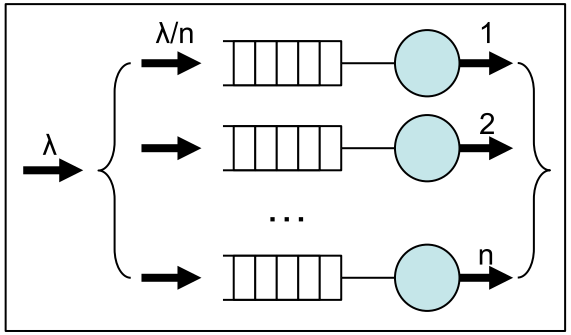
$$S_1 = \frac{1/\mu}{1-\rho_1}$$

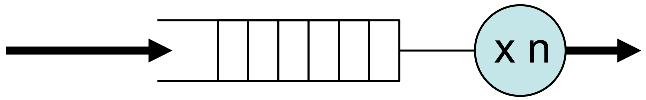
1 servidor

- El tiempo en el sistema ahora es: $S = \dfrac{1/\mu}{1-\dfrac{1}{n}\rho_1}$
- Con n>>1 el tiempo en el sistema tiende al tiempo de servicio
- Definimos ahora: $\rho = \dfrac{\lambda}{n\mu}$
- Debe ser ρ<1

Un servidor más rápido

- Comparemos lo anterior con tener un solo servidor pero n veces más rápido





- Los n servidores con tiempo medio de servicio 1/μ
- Este servidor con tiempo medio de servicio $1/\mu_n = 1/(n\mu)$
- Tiempo en sistema:

$$S = \frac{1/n\mu}{1 - \dfrac{\lambda}{n\mu}}$$

$$S_n = \frac{1/\mu}{1 - \dfrac{1}{n}\rho_1}$$

$$S = \frac{1/n\mu}{1 - \dfrac{1}{n}\rho_1} = \frac{S_n}{n}$$

- Tiempo en el sistema n veces menor

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

- Reordenando quedan:

$$(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

- Se representan mediante un diagrama de estados:

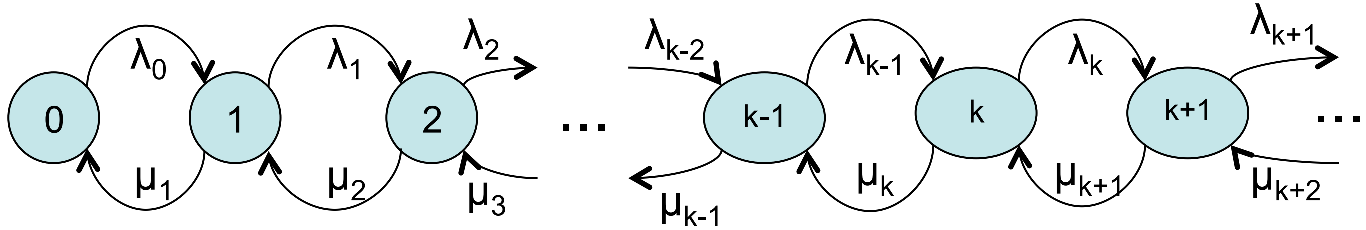


Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

  $0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

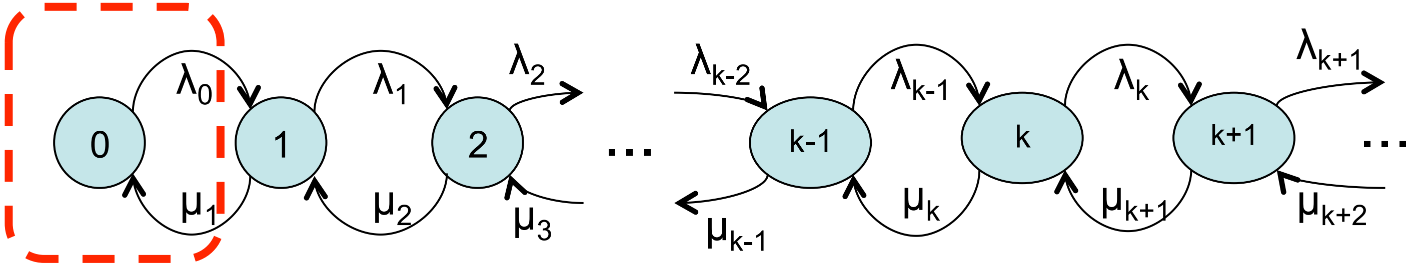
  $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$

- Reordenando quedan:

  $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$

  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - Probabilidad de estar dentro x tasa de salida = Probabilidad de estar fuera x tasa de entrada
  - En este caso $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

  $0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ $\quad k\geq 1$

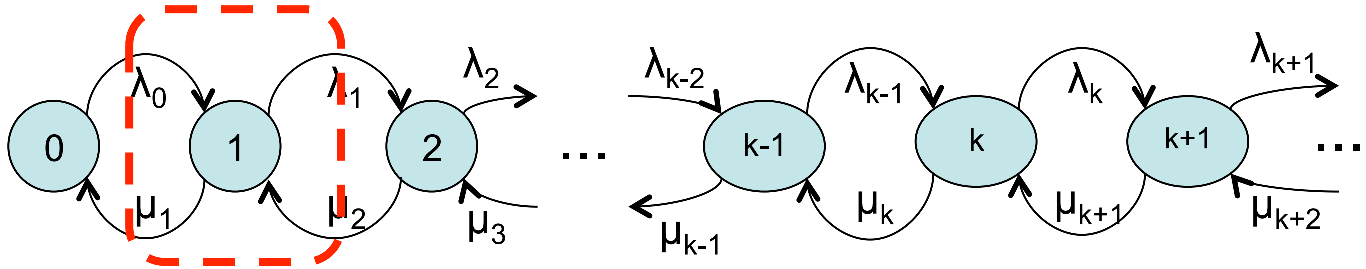
  $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$

- Reordenando quedan:

  $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ $\quad k\geq 1$

  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - $(\lambda_1+\mu_1)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2$
  - Esto es $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ para k=1

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

  $0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ $\quad$ $k\geq 1$

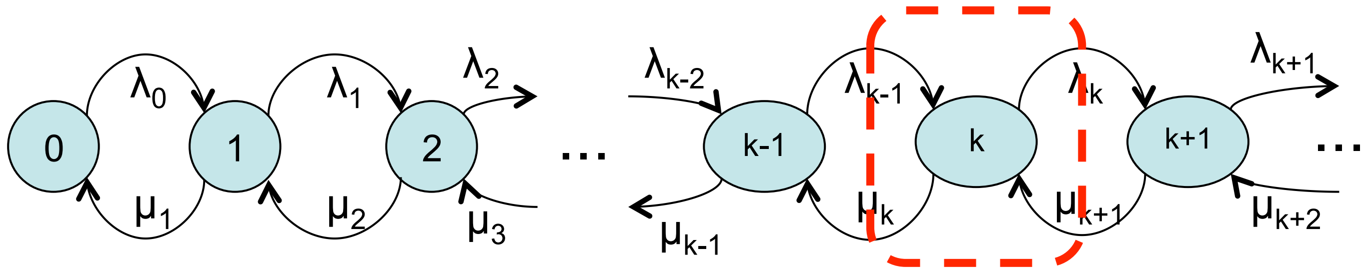
  $0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$

- Reordenando quedan:

  $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ $\quad$ $k\geq 1$

  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

- Se representan mediante un diagrama de estados:



- Balance dentro de una superficie:
  - $(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$

Diagrama de transición de estados

- Otra interpretación de las ecuaciones de equilibrio:

$$0 = -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

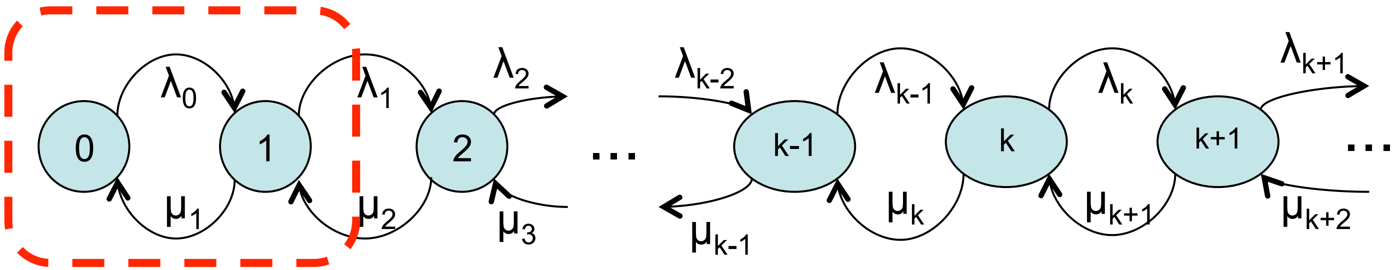
$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1$$

- Reordenando quedan:

$$(\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \qquad k\geq 1$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

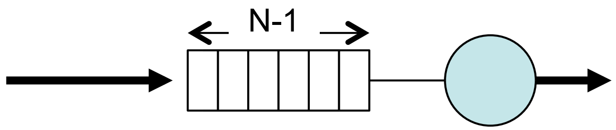
- Se representan mediante un diagrama de estados:



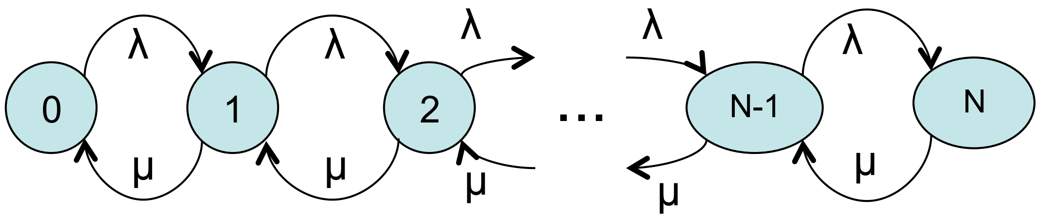
- Vale cualquier superficie:
  - $\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2$

M/M/1/N

- Supongamos que el número máximo de clientes en el sistema es N



- Nos queda un diagrama como:

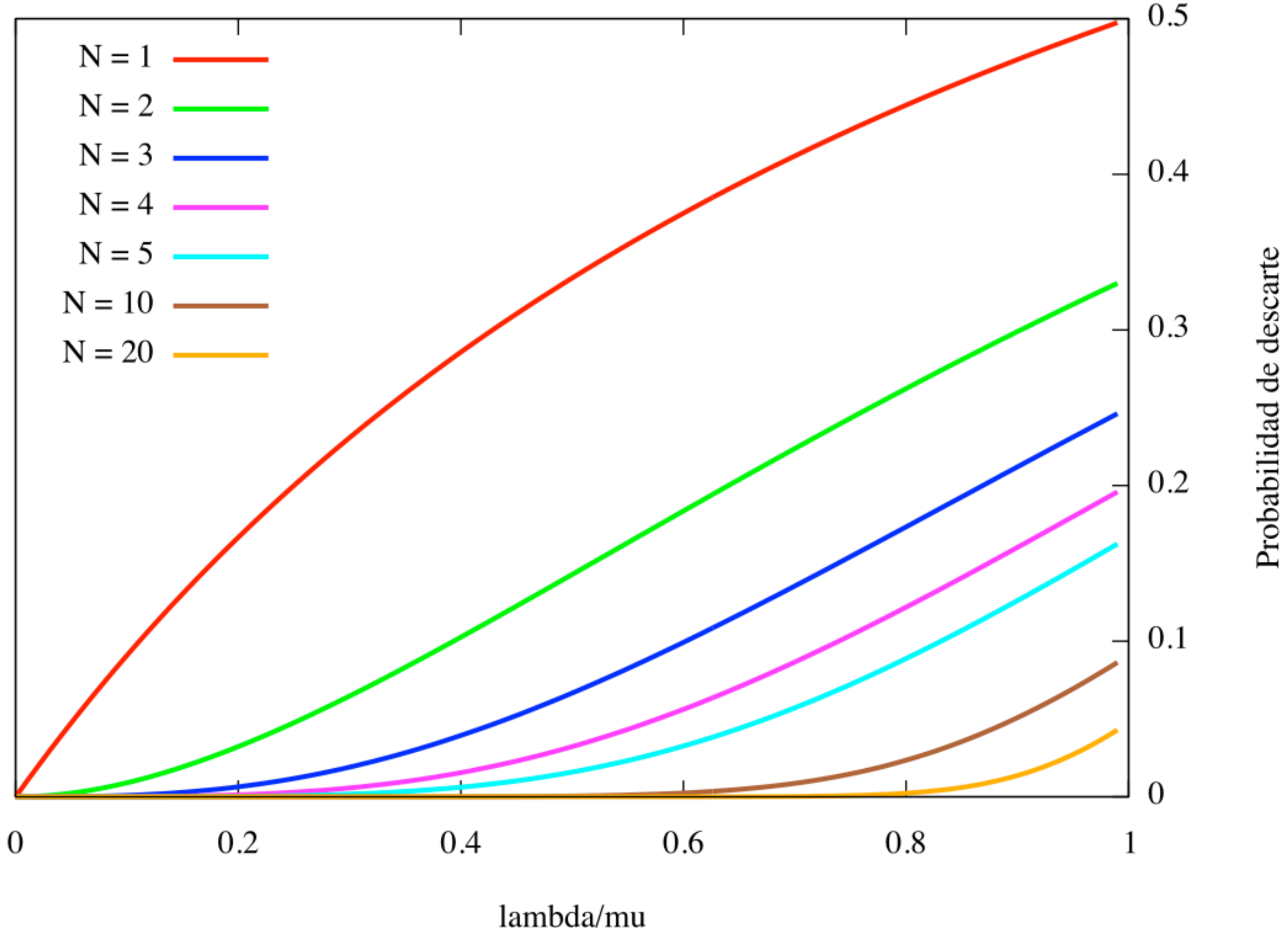


$\lambda=\lambda_k$
$\mu=\mu_k$

- La probabilidad estacionaria de estado sigue siendo $p_k = p_0\rho_1^k$
- Pero ahora el p_0 vale: $$p_0 = \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1^{N+1}}$$ $(\rho_1=\lambda/\mu)$
- Así que ($0 \le k \le N$): $$p_k = \frac{(1-\rho_1)\rho_1^k}{1-\rho_1^{N+1}}$$
- Y la probabilidad de sistema lleno es: $$p_N = \frac{(1-\rho_1)\rho_1^N}{1-\rho_1^{N+1}}$$
- Que sería la probabilidad de pérdida

M/M/1/N: pérdidas

$$p_N = \frac{(1-\rho_1)\rho_1^N}{1-\rho_1^{N+1}}$$

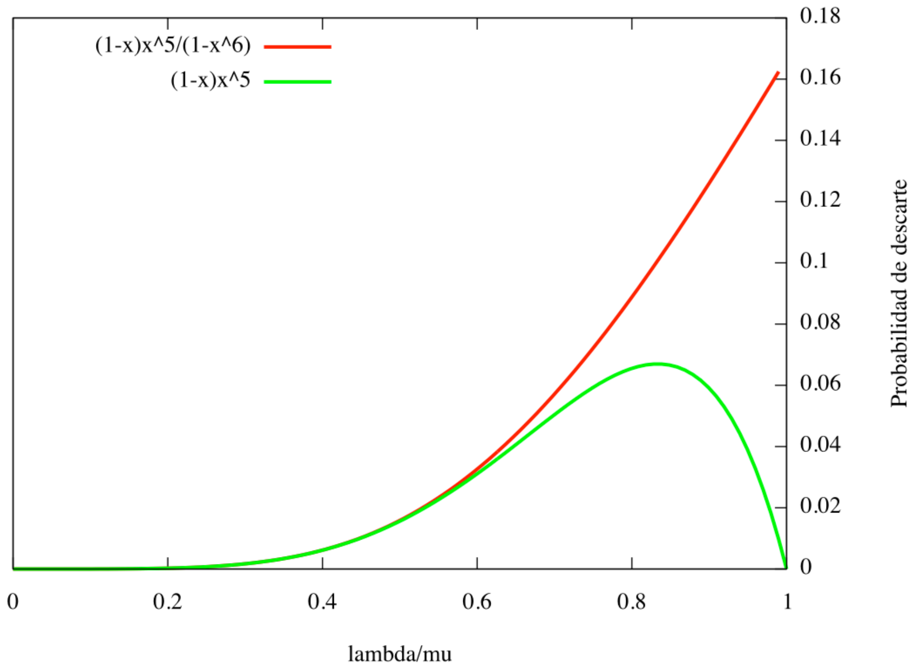


M/M/1/N: ρ pequeño

- Para un factor de utilización pequeño podemos aproximar:

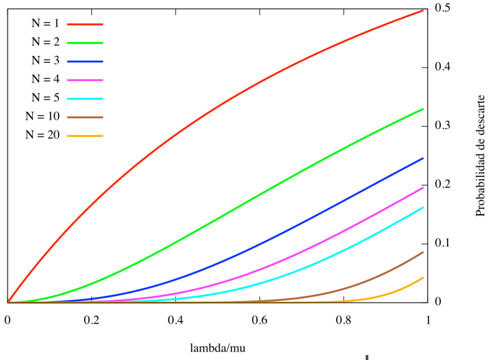
$$p_N = \frac{(1-\rho_1)\rho_1^N}{1-\rho_1^{N+1}} \sim (1-\rho_1)\rho_1^N$$

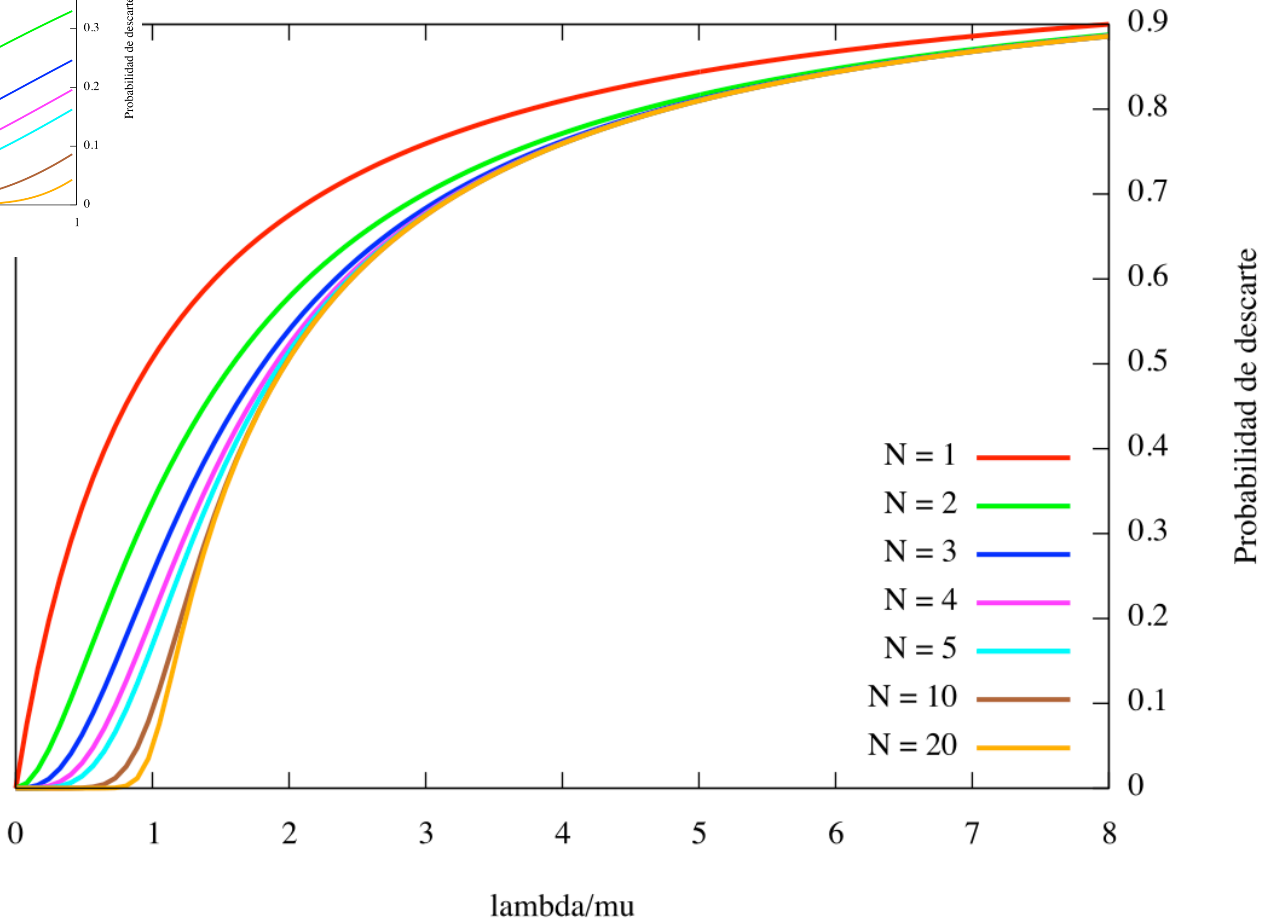
- Esto es precisamente la probabilidad de que en un M/M/1 (cola infinita) nos encontremos en el estado N
- Es decir, para ρ_1<<1 podemos aproximar la probabilidad de estar en el estado N con el valor para el caso de cola infinita



M/M/1/N: ρ grande

- Este sistema no requiere que ρ<1
- Al ser finito el número de estados siempre existe el equilibrio

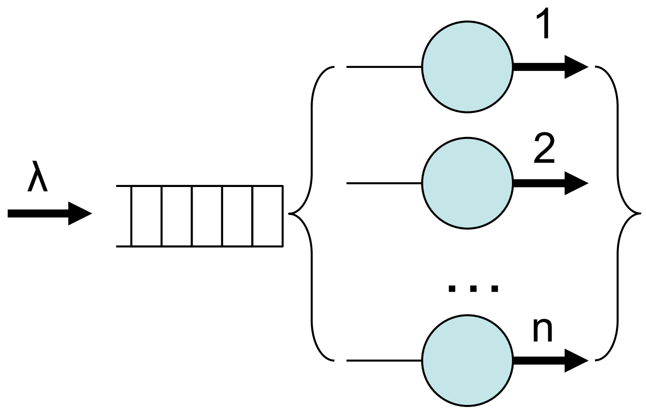




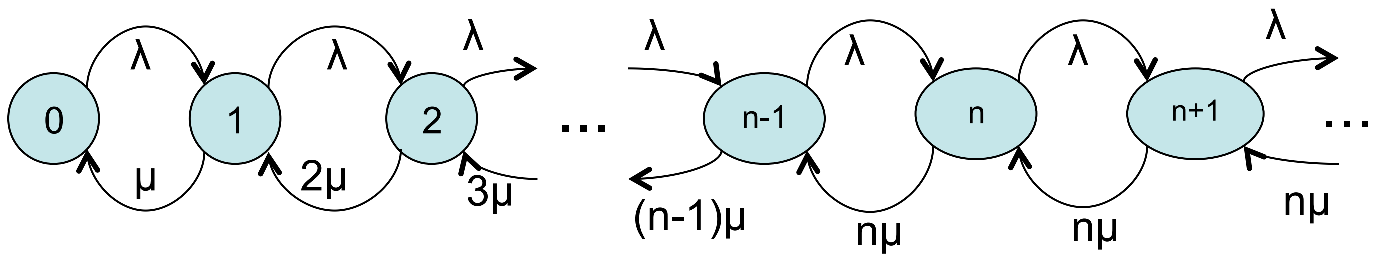
$$p_N = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$$

M/M/n

- Una cola compartida para n servidores
- Cuando queda un servidor libre atiende al primero de la cola

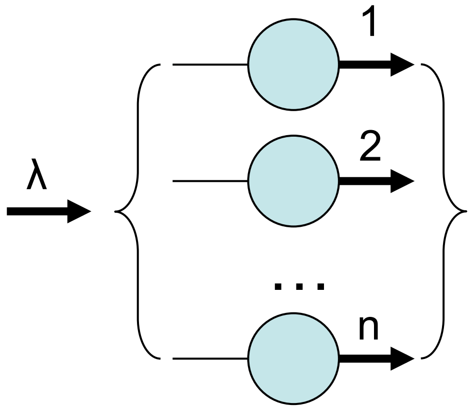


- Si hay k servidores ocupados con tiempos de servicio exponenciales entonces hay salidas a una tasa kμ
- Diagrama de estados: (lo dejamos sin resolver)

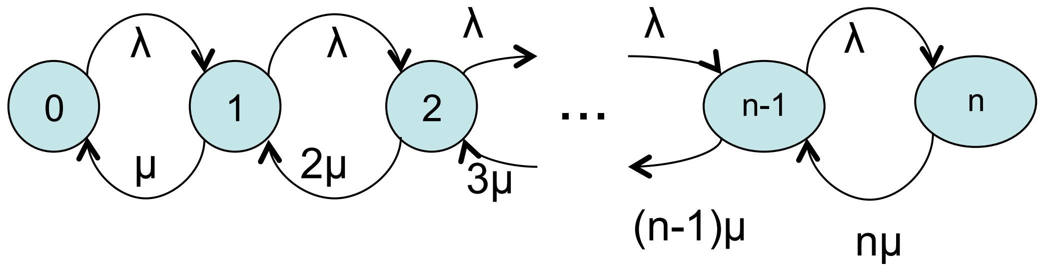


M/M/n/n

- n servidores sin cola
- Mientras todos los servidores están ocupados se rechazan llegadas



- Diagrama de estados:



- Probabilidad estacionaria:
- (…)

$$p_k = \frac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad 0 \le k \le n$$

M/M/n/n

- Probabilidad estacionaria:

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad 0 \le k \le n$$

- Probabilidad de sistema lleno (y descartes ante llegadas) (…)

M/M/n/n

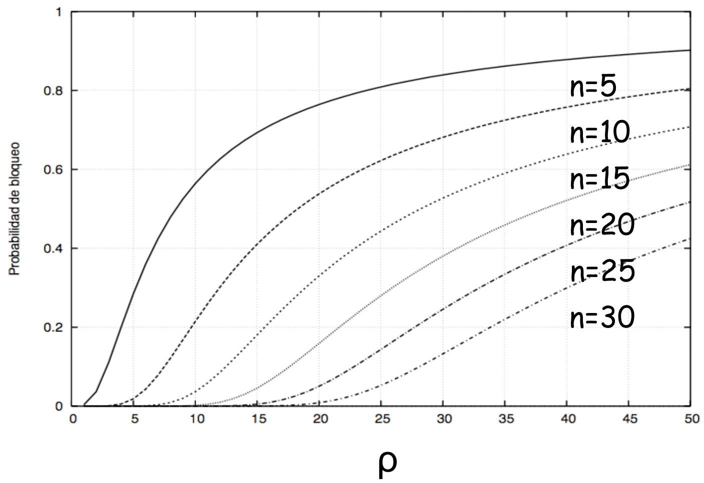
- Probabilidad estacionaria:

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}} \qquad 0 \leq k \leq n$$

- Probabilidad de sistema lleno (y descartes ante llegadas) es p_n

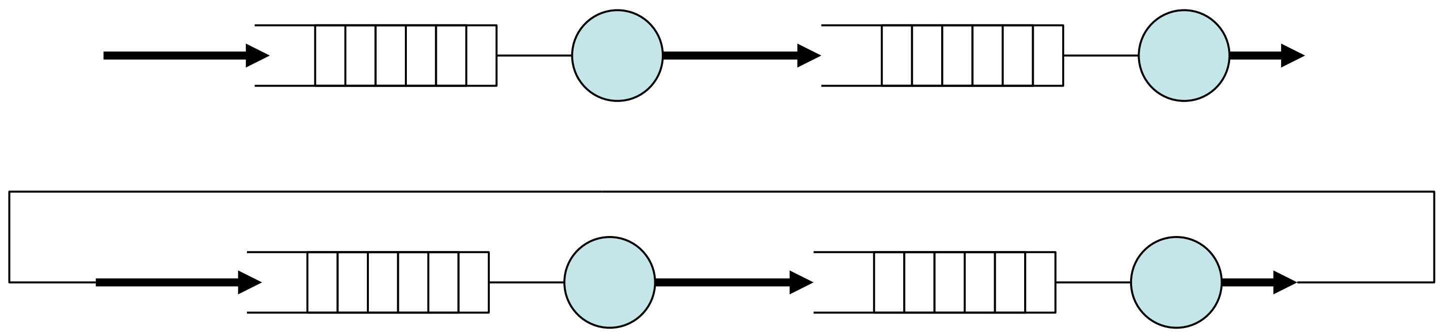
$$p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}$$

- Y por si a alguien aún no le suena, eso es la Erlang-B



Otras preguntas

- ¿Y la evolución con el tiempo de las probabilidades de estado hasta estabilizarse?
- ¿El proceso de salida cómo es? ¿Es de Poisson?
- ¿Y la distribución del tiempo de espera?
- ¿Y si a continuación viene otra cola?
- ¿Y si el número de clientes es finito?
- ¿Y si los tiempos de servicio no son exponenciales?
- ¿Y si las llegadas no son de Poisson?
- ¿Y si puede haber realimentación?



Resumen

- Tenemos modelos matemáticos
- Sencillos para llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (i.i.d.)
- Podemos calcular para ellos:
  - Probabilidad en equilibrio del estado
  - Número medio de clientes en el sistema
  - Tiempo medio en el sistema o en cola
- Algunos sistemas:
  - M/M/1 : 1 servidor con cola infinita
  - M/M/1/N : 1 servidor con cola finita. Probabilidad de pérdida aproximable con el estado N de la cola infinita
  - M/M/m/m : m servidores sin cola