Proceso de llegadas de Poisson

Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación, 4º

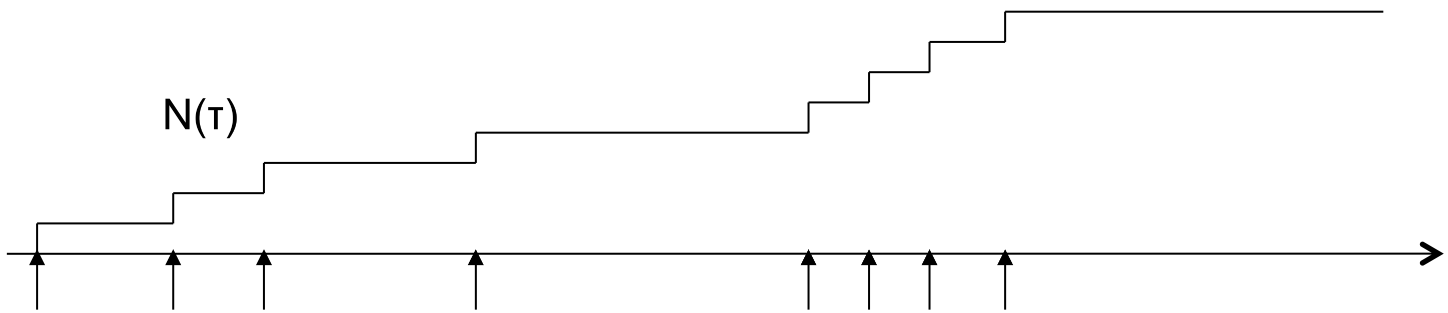
Hemos visto

Proceso de nacimiento puro

- Markoviano
- El estado es el número de clientes en el sistema
- Llegadas (nacimientos) independientes
- P[1 llegada en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $\lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- P[0 llegadas en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $1 - \lambda_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

- Proceso de Poisson

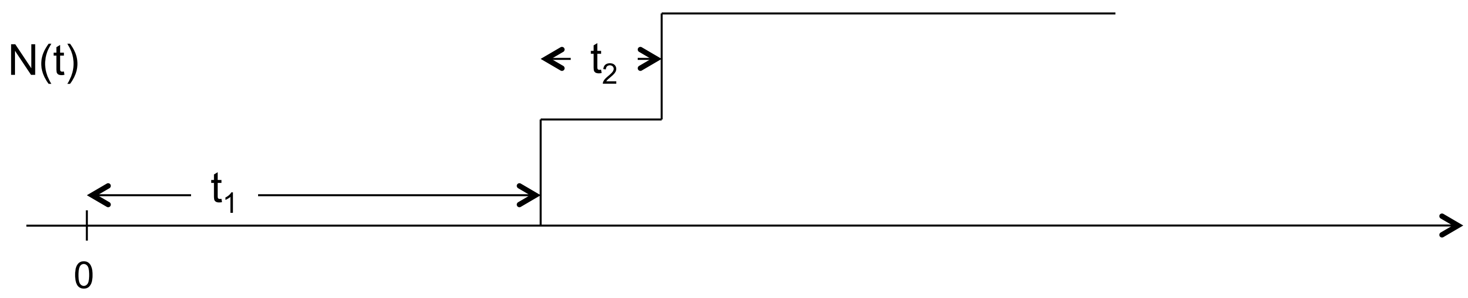


Poisson: *interarrival times*

- Partimos de 0 llegadas en $\tau = 0$
- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar el primero?
- Llamemos t_1 a la v.a. del tiempo hasta esa primera llegada
- Es fácil de ver que los eventos $\{ N(t) = 0 \} = \{ t_1 > t \}$
- Porque para cualquier t, si $N(t)=0$ entonces debe ser $t_1>t$ y viceversa, si $t_1>t$ entonces $N(t)=0$
- Es decir:

$$P[t_1 > t] = P[N(t) = 0] = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

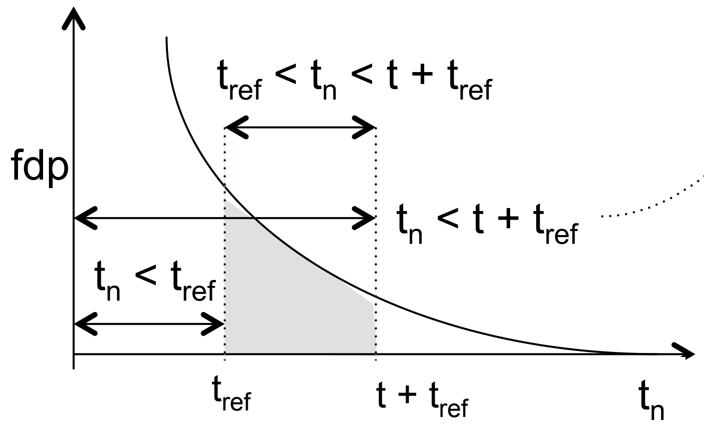
- t_1 es una variable aleatoria exponencial
- Dado que todo el pasado queda olvidado, el tiempo hasta la siguiente será de nuevo exponencial

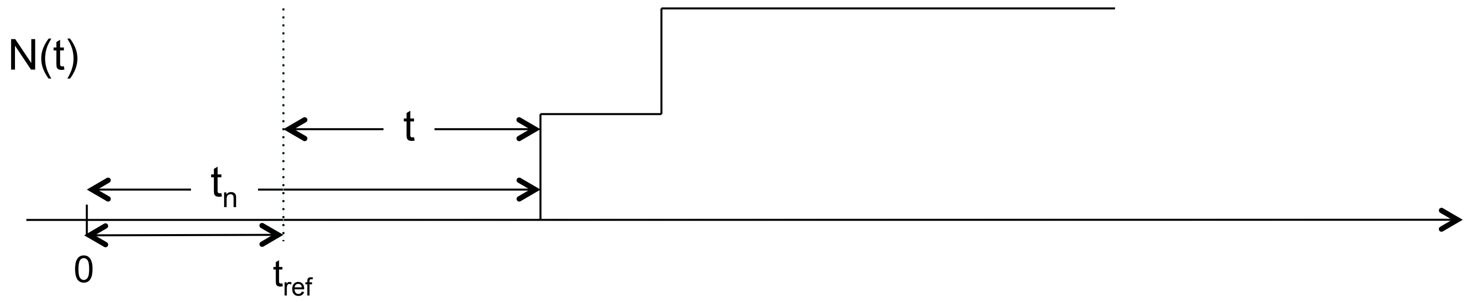


Poisson: tiempo restante

- Dado un instante de tiempo cualquiera, ¿cuánto falta hasta la siguiente llegada?

$$P[t_n < t + t_{ref} \mid t_n > t_{ref}] = \frac{P[t_{ref} < t_n < t + t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} = \frac{P[t_n < t + t_{ref}] - P[t_n < t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} =$$





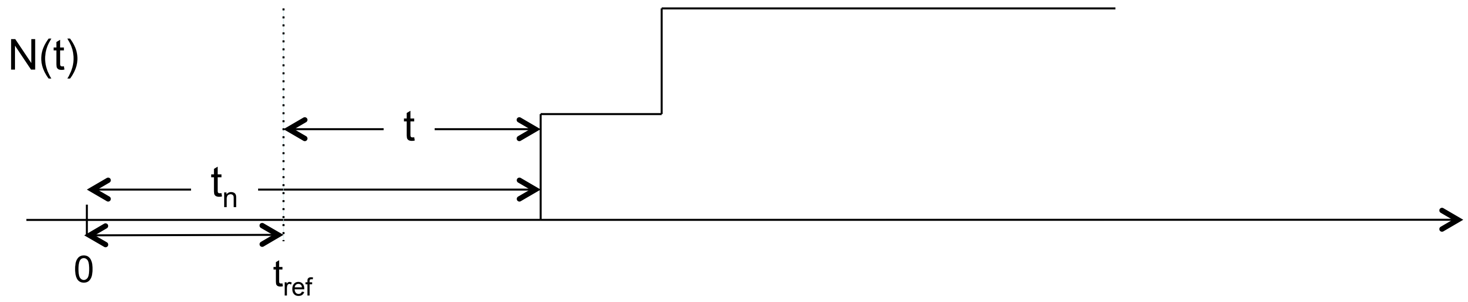
Poisson: tiempo restante

- Dado un instante de tiempo cualquiera, ¿cuánto falta hasta la siguiente llegada?

$$P[t_n < t + t_{ref} \mid t_n > t_{ref}] = \frac{P[t_{ref} < t_n < t + t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} = \frac{P[t_n < t + t_{ref}] - P[t_n < t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_{ref})} - (1 - e^{-\lambda t_{ref}})}{e^{-\lambda t_{ref}}} =$$

$$\boxed{P[t_n < t] = 1 - e^{-\lambda t}}$$



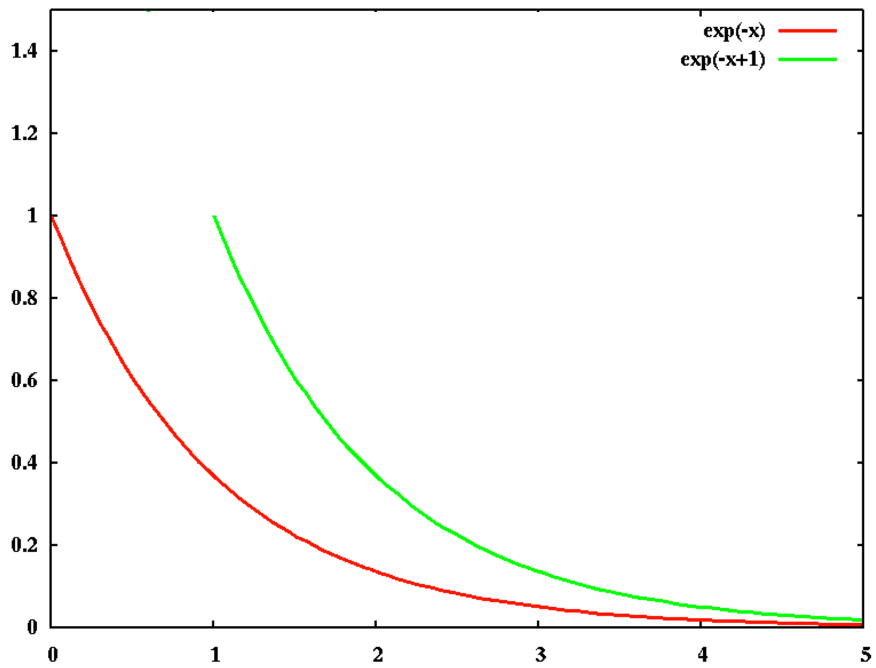
Poisson: tiempo restante

- Dado un instante de tiempo cualquiera, ¿cuánto falta hasta la siguiente llegada?

$$P[t_n < t + t_{ref} \mid t_n > t_{ref}] = \frac{P[t_{ref} < t_n < t + t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} = \frac{P[t_n < t + t_{ref}] - P[t_n < t_{ref}]}{P[t_n > t_{ref}]} =$$

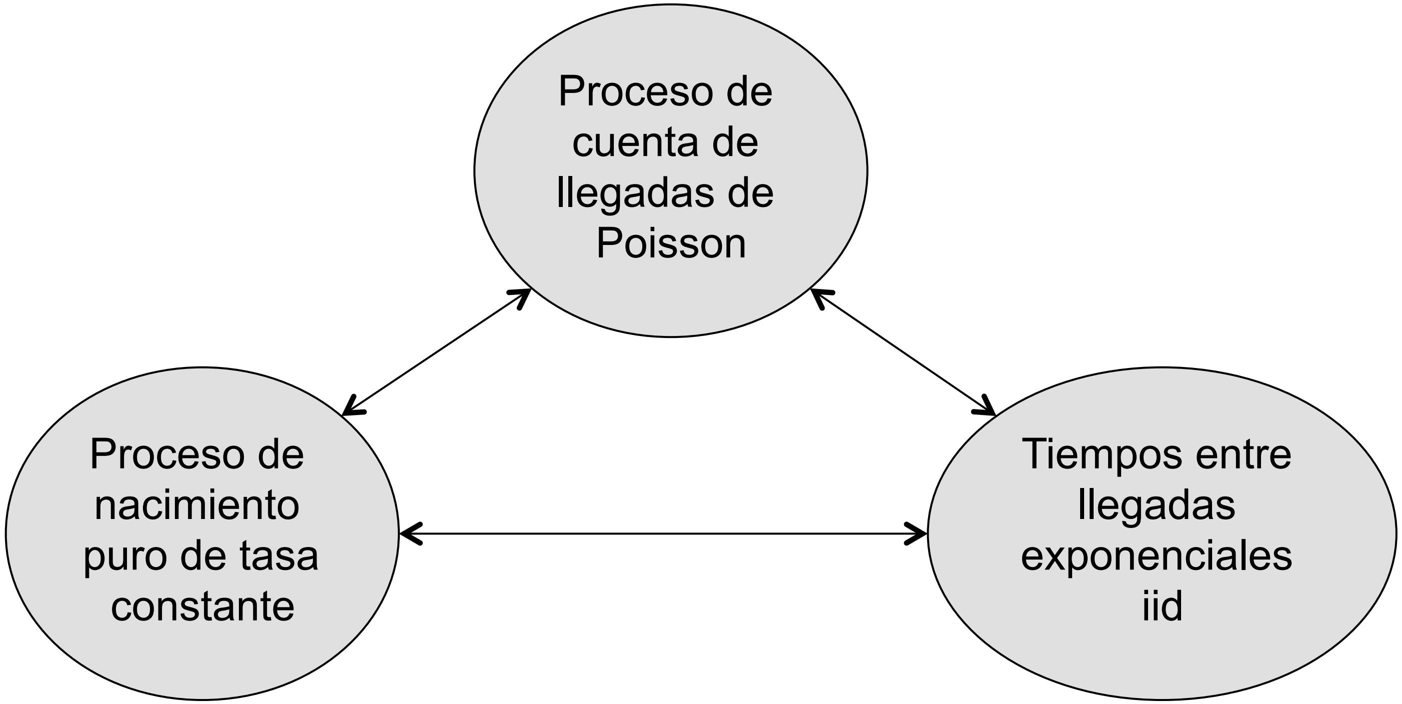
$$= \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_{ref})} - (1 - e^{-\lambda t_{ref}})}{e^{-\lambda t_{ref}}} = \frac{e^{-\lambda t_{ref}} - e^{-\lambda(t+t_{ref})}}{e^{-\lambda t_{ref}}} = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Una exponencial idéntica



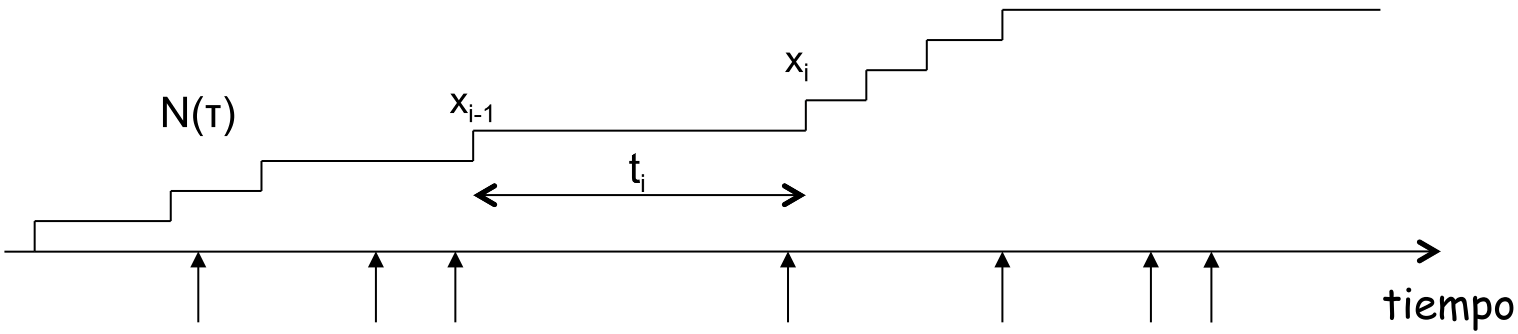
Poisson: *interarrival times*

- Un proceso de Poisson presenta tiempos entre llegadas exponenciales
- Además son idependientes (por la propiedad de Markov) e identicamente distribuidas (i.i.d.)
- Tiempos entre llegadas positivos i.i.d. da lo que se llama un “proceso de renovación” (*renewal process*)



PASTA

- Llegadas según Poisson observan el estado de un proceso
- Por ejemplo, para cada llegada contamos el número de clientes en el sistema con cola infinita
- La fracción de las llegadas que ve el sistema en un estado es igual a la fracción de tiempo que el proceso está en ese estado
- *Poisson Arrivals See Time Averages*

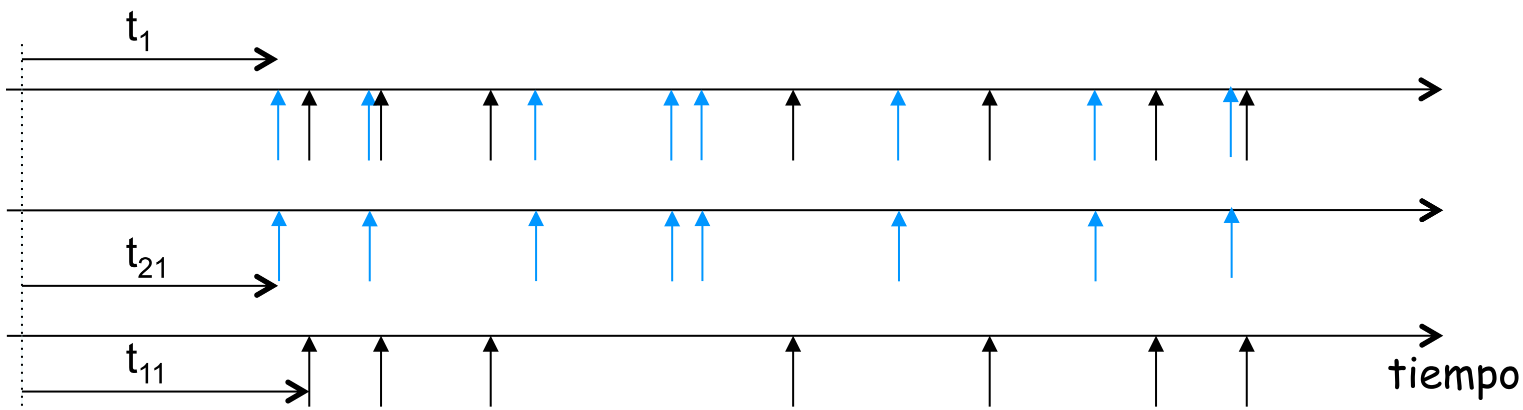


Suma de procesos de Poisson

- Combinamos dos procesos de Poisson $\{N_1(t), t>0\}$ y $\{N_2(t), t>0\}$ independientes con tasas λ_1 y λ_2
- El tiempo hasta la primera llegada t_1 será el mínimo de los tiempos hasta la primera llegada de cada uno de ellos
- t_1 será mayor que t si son mayores que t tanto el tiempo hasta la primera llegada de $N_1(t)$ como hasta la primera de $N_2(t)$

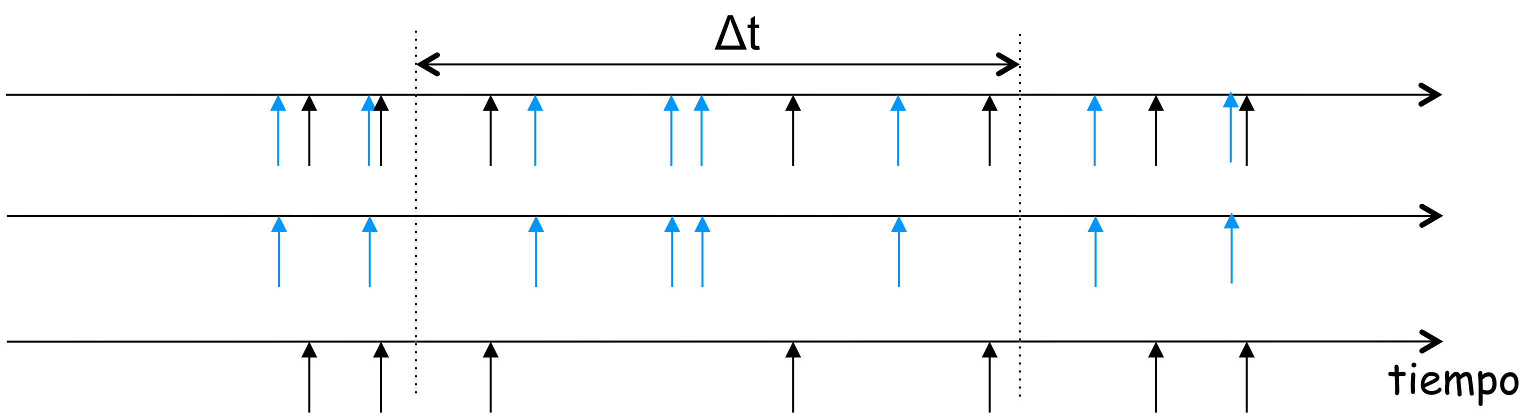
$$P[t_1 > t] = P[t_{11} > t]P[t_{21} > t] = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

- Es decir, el tiempo hasta la primera llegada es exponencial
- Y por la falta de memoria de cada proceso lo son el resto



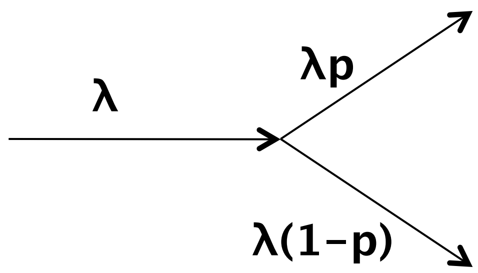
Suma de procesos de Poisson

- Combinamos dos procesos de Poisson $\{N_1(t), t>0\}$ y $\{N_2(t), t>0\}$ independientes con tasas λ_1 y λ_2
- O más sencillo de ver si sabemos que la suma de dos variables aleatorias de Poisson independientes es una v.a. de Poisson
- Por otro lado, aunque no sean procesos de Poisson, si son muchos su combinación tiende a un proceso de Poisson



Random splitting

- Proceso de Poisson con tasa λ
- Repartidas las llegadas en dos grupos mediante Bernoulli de parámetro p
- Los procesos resultantes son procesos de Poisson de tasas λp y λ(1-p)

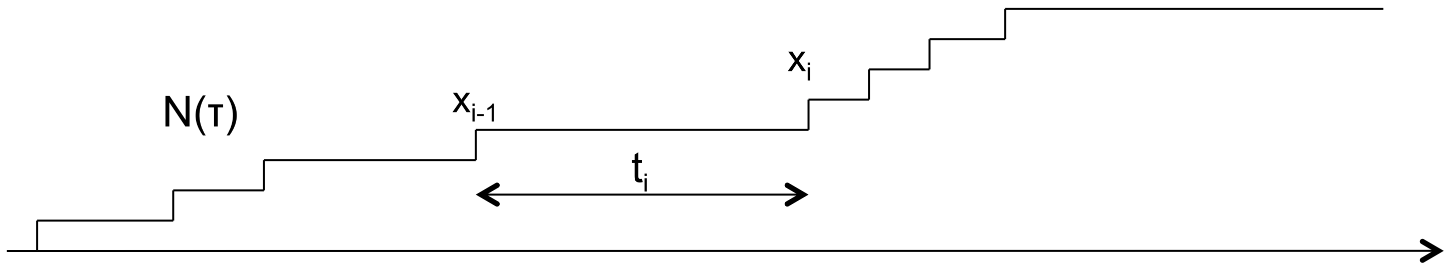


Falta de memoria

- t_i : tiempo que transcurre entre la llegada al estado x_{i-1} y el estado x_i
- En un proceso de Markov la historia pasada está completamente descrita por el estado actual

$$P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n, X(\tau_{n-1}) = x_n, \ldots, X(\tau_1) \leq x_1] = P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n]$$

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_{n+1}$$

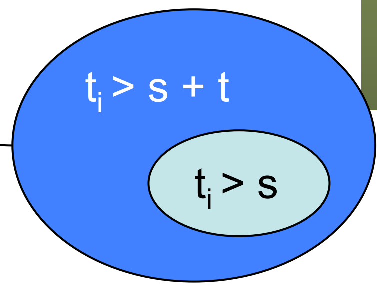


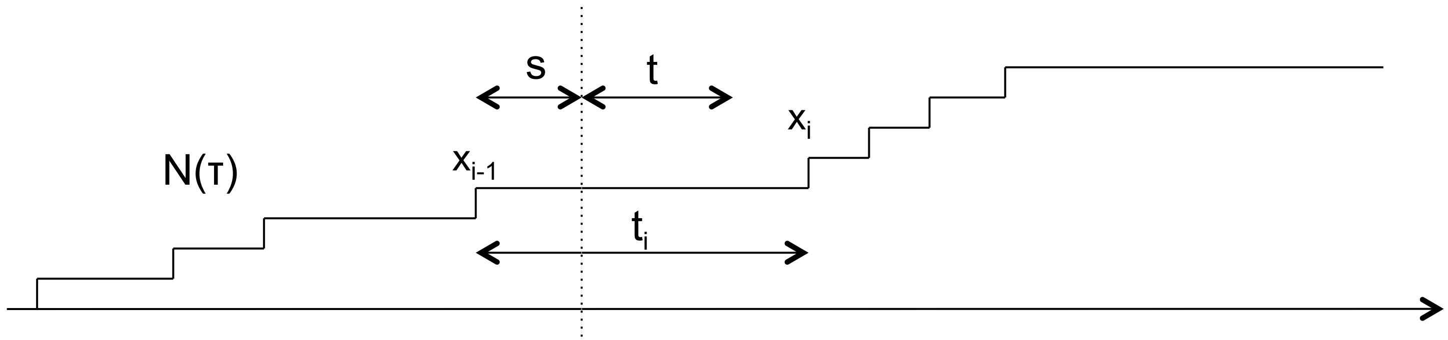
Falta de memoria

- Entonces, saber que ha transcurrido un cierto tiempo no nos debe decir nada sobre el tiempo que nos queda en ese estado:

$$P[\, t_i > s + t \mid t_i > s \,] = h(t)$$

$$P[t_i > s+t \mid t_i > s] = \frac{P[t_i > s+t, t_i > s]}{P[t_i > s]} = \frac{P[t_i > s+t]}{P[t_i > s]} = h(t)$$





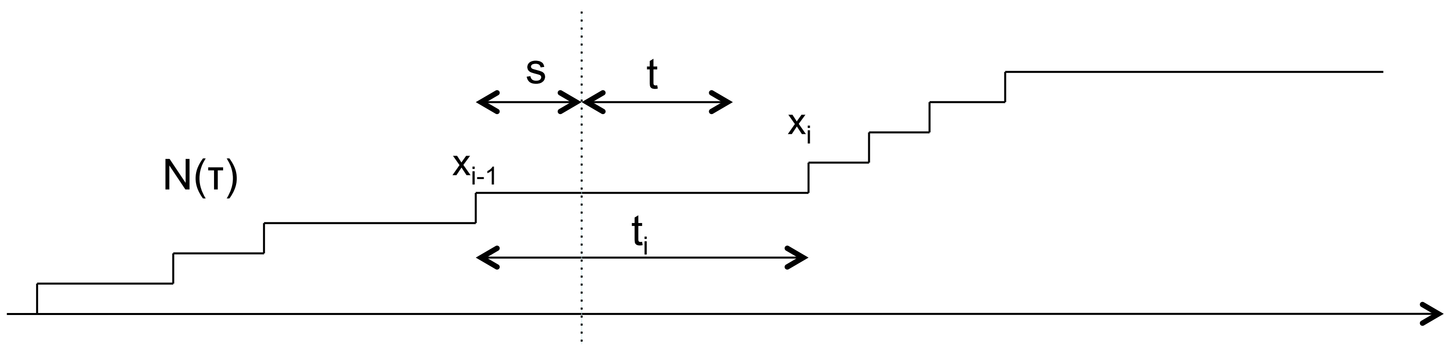
Falta de memoria

- Entonces, saber que ha transcurrido un cierto tiempo no nos debe decir nada sobre el tiempo que nos queda en ese estado:

$$P[\, t_i > s + t \mid t_i > s \,] = h(t)$$

$$P[t_i > s+t \mid t_i > s] = \frac{P[t_i > s+t, t_i > s]}{P[t_i > s]} = \frac{P[t_i > s+t]}{P[t_i > s]} = h(t)$$

$$P[t_i > s+t] = P[t_i > s]h(t)$$



Falta de memoria

$$P[t_i > s + t] = \underbrace{P[t_i > s]}h(t)$$

- Si s=0 vemos que P[t_i > s] = P[t_i > 0] = 1

Falta de memoria

$$P[t_i > s+t] = P[t_i > s]h(t) \qquad (1)$$

- Si s=0 vemos que P[t_i > s] = P[t_i > 0] = 1
- Y entonces sustituyendo en la anterior queda:

$$P[t_i > 0+t] = P[t_i > 0]h(t) = h(t)$$

- Es decir, P[t_i > t] = h(t)
- Sustituyendo en (1) queda: $P[t_i > s+t] = P[t_i > s]P[t_i > t]$ (2)
- Sabemos que:

$$P[t_i > t] = 1 - P[t_i \leq t]$$

- Con lo que:

$$\frac{d}{dt}P[t_i > t] = \frac{d}{dt}(1 - P[t_i \leq t]) = -f_{\tau_i}(t)$$

- Donde el último término es la función de densidad de probabilidad
- Derivamos (2) respecto a s :

$$\frac{dP[t_i > s+t]}{ds} = -f_{\tau_i}(s)P[t_i > t]$$

Falta de memoria

$$\frac{dP[t_i > s+t]}{ds} = -f_{\tau_i}(s)P[t_i > t]$$

- Reordenando:

$$\frac{dP[t_i > s+t]}{P[t_i > t]} = -f_{\tau_i}(s)ds$$

- E integrando entre 0 y t queda:

$$\ln P[\tau_i > t] = -f_{\tau_i}(0)t$$

- O lo que es lo mismo

$$P[\tau_i > t] = e^{-f_{\tau_i}(0)t}$$

- Y así calculando la función de densidad de probabilidad:

$$f_{\tau_i}(t) = \frac{dP[\tau_i < t]}{dt} = \frac{d(1-P[\tau_i > t])}{dt} = -\frac{dP[t_i > t]}{dt} = f_{\tau_i}(0)e^{-f_{\tau_i}(0)t}$$

$$f_{\tau_i}(t) = f_{\tau_i}(0)e^{-f_{\tau_i}(0)t}$$

- Es decir, el tiempo que se está en un estado en un proceso de Markov sigue una exponencial (que podría depender del estado)

Falta de memoria

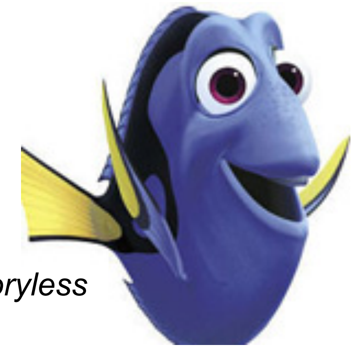
- Se dice que una variable aleatoria X, positiva, “no tiene memoria” si:

$$P[X > s + t] = P[X > s]P[X > t]$$

- Una variable aleatoria exponencial cumple esa condición:

$$P[X > s + t] = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t} = P[X > s]P[X > t]$$

- Pero además, como hemos visto, una variable que lo cumpla debe ser exponencial
- Es decir, la variable aleatoria exponencial es la única con la propiedad de no tener memoria (*memoryless*)
- Y es normal que los tiempos entre llegadas en un proceso de Poisson sean exponenciales pues lo es el tiempo en un estado de un proceso Markoviano



Memoryless

Resumen

- En un proceso de Poisson los tiempos entre llegadas son exponenciales i.i.d.
- También el tiempo en un estado de un proceso Markoviano
- Si sabemos que ha transcurrido cierto tiempo desde la última llegada no sabemos nada sobre el tiempo que falta hasta la siguiente
- Las llegadas de Poisson sirven para muestrear estados temporales
- La suma de procesos de Poisson es de Poisson
- La separación de un proceso de Poisson en 2 procesos mediante un proceso de Bernouilli es también de Poisson