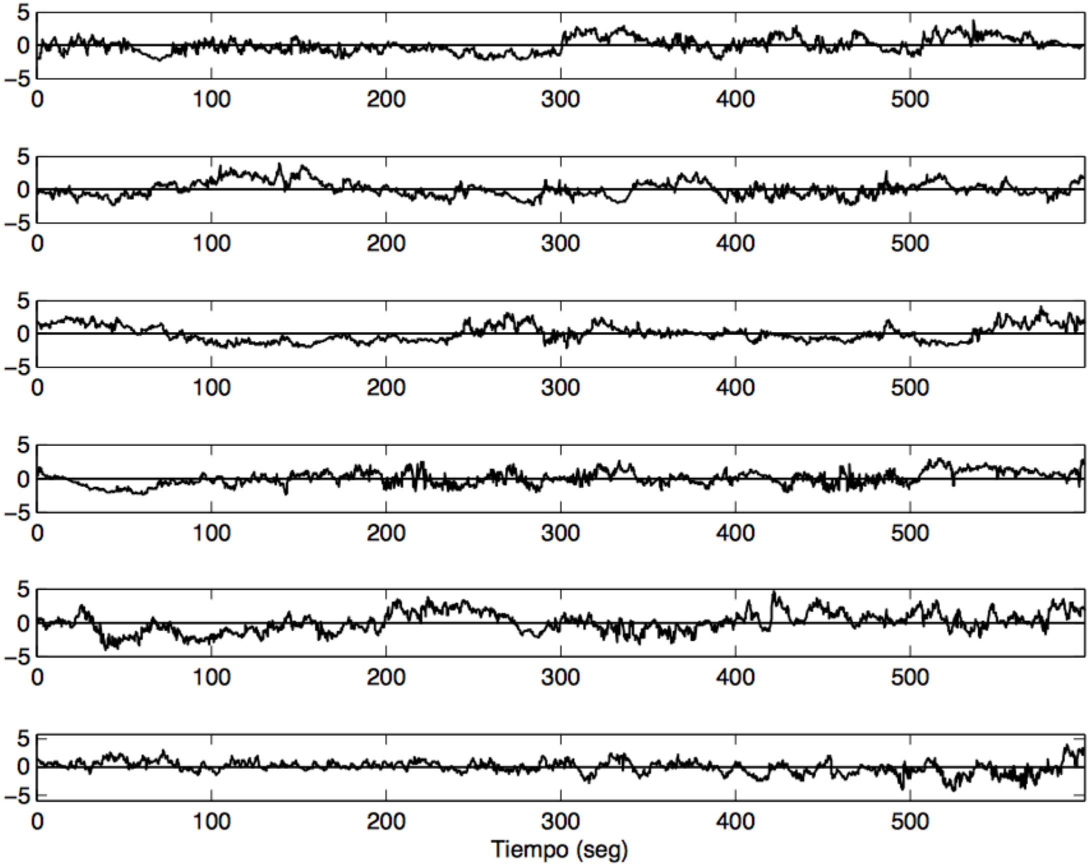
Procesos de llegadas

Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación, 4º

Proceso estocástico

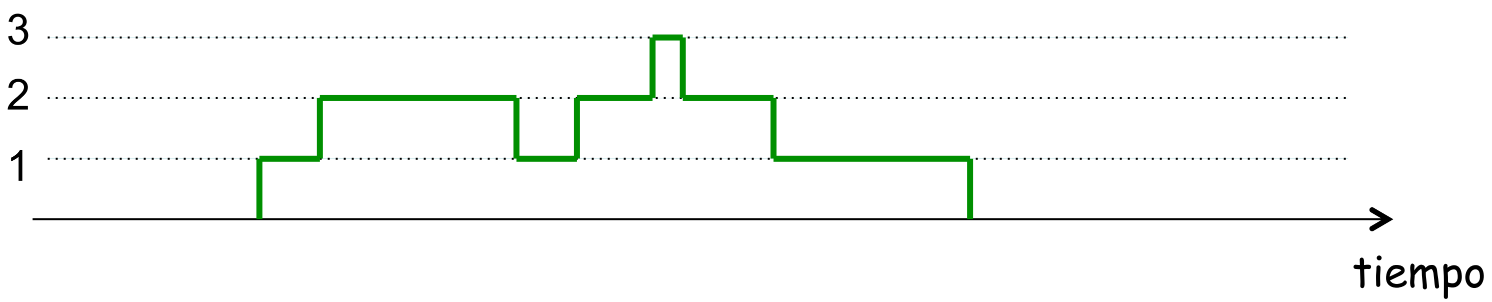
- Es una familia de variables aleatorias {X(τ)} indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Temperatura en una sala



Hay múltiples realizaciones posibles (funciones temporales)

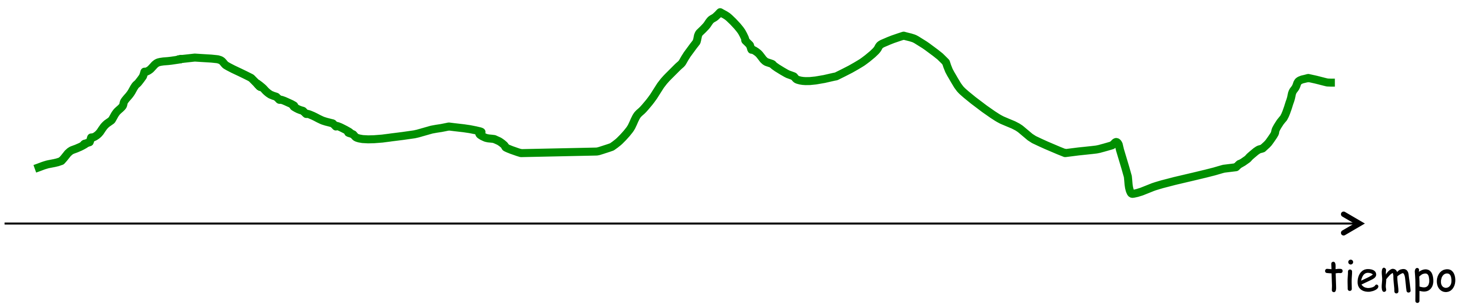
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias {X(τ)} indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Número de personas en un cine podría modelarse así
- Tipos: según los valores que toma X(τ), según los valores de la variable de tiempo y según las dependencias entre los X(τ)



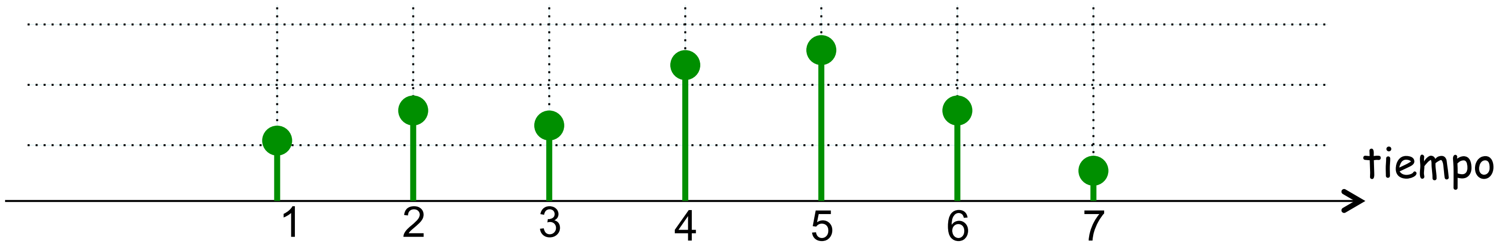
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias {X(τ)} indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Número de personas en un cine podría modelarse así
- Tipos
  - Estado discreto o continuo
    - “Estados” son los valores que toman los X(τ)
    - Ejemplo: temperatura en la sala sería de estado continuo
    - Ejemplo: nº personas en cine sería de estado discreto
    - Los de estado discreto se suelen llamar “cadenas”
  - (...)



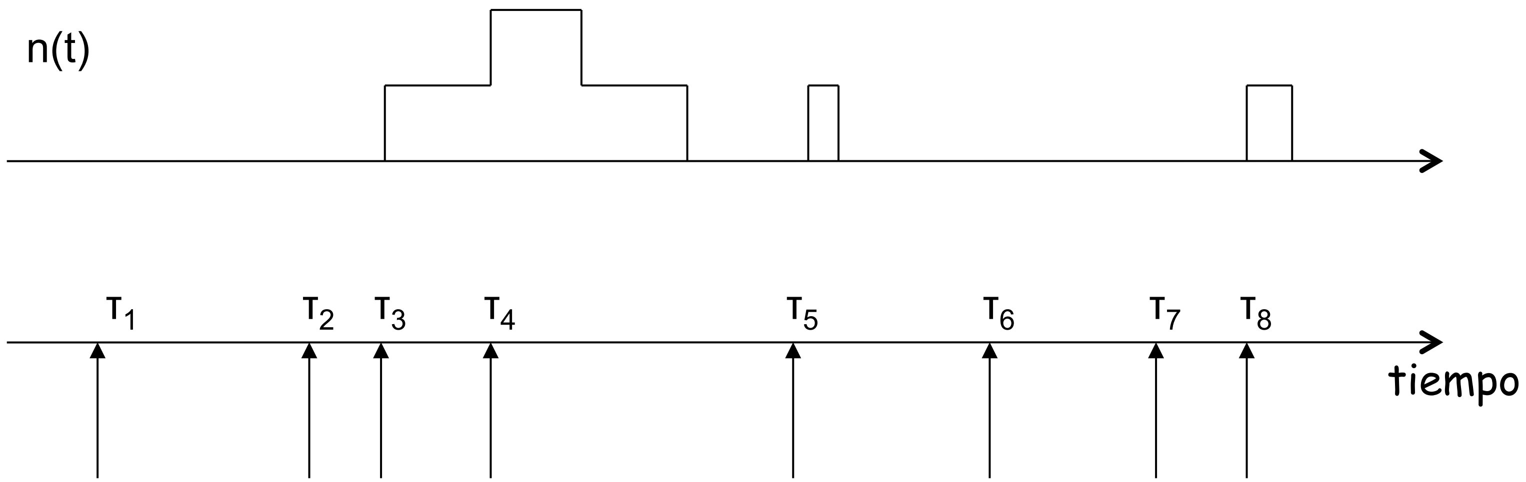
Proceso estocástico

- Es una familia de variables aleatorias $\{X(\tau)\}$ indexadas por el parámetro τ (tiempo)
- Ejemplo: Número de personas en un cine podría modelarse así
- Tipos
  - Estado discreto o continuo
    - “Estados” son los valores que toman los $X(\tau)$
    - Ejemplo: temperatura en la sala sería de estado continuo
    - Ejemplo: nº personas en cine sería de estado discreto
    - Los de estado discreto se suelen llamar “cadenas”
  - Tiempo discreto o continuo
    - Es continuo si el estado puede cambiar en cualquier instante de un intervalo de tiempo real (en discreto se suele usar X_n en vez de $X(\tau)$)
    - Ejemplo: ambos ejemplo anteriores serían de tiempo continuo
    - Ejemplo: cada día tomamos la temperatura de un paciente, sería de tiempo discreto (día 1, 2, 3, etc) y estado continuo



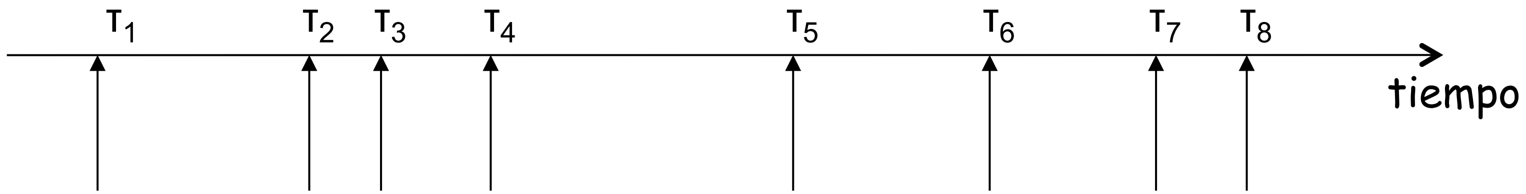
Proceso estocástico

- Ejemplo: el número de clientes en cola forma un cadena de tiempo continuo $\{n(\tau)\}$
- Ejemplo: los instantes en que se producen unas llegadas forman un proceso de tiempo discreto $\{\tau_n\}$
- (No confundir con que esa variable dé valores que interpretemos como tiempo y por lo tanto sean continuos)



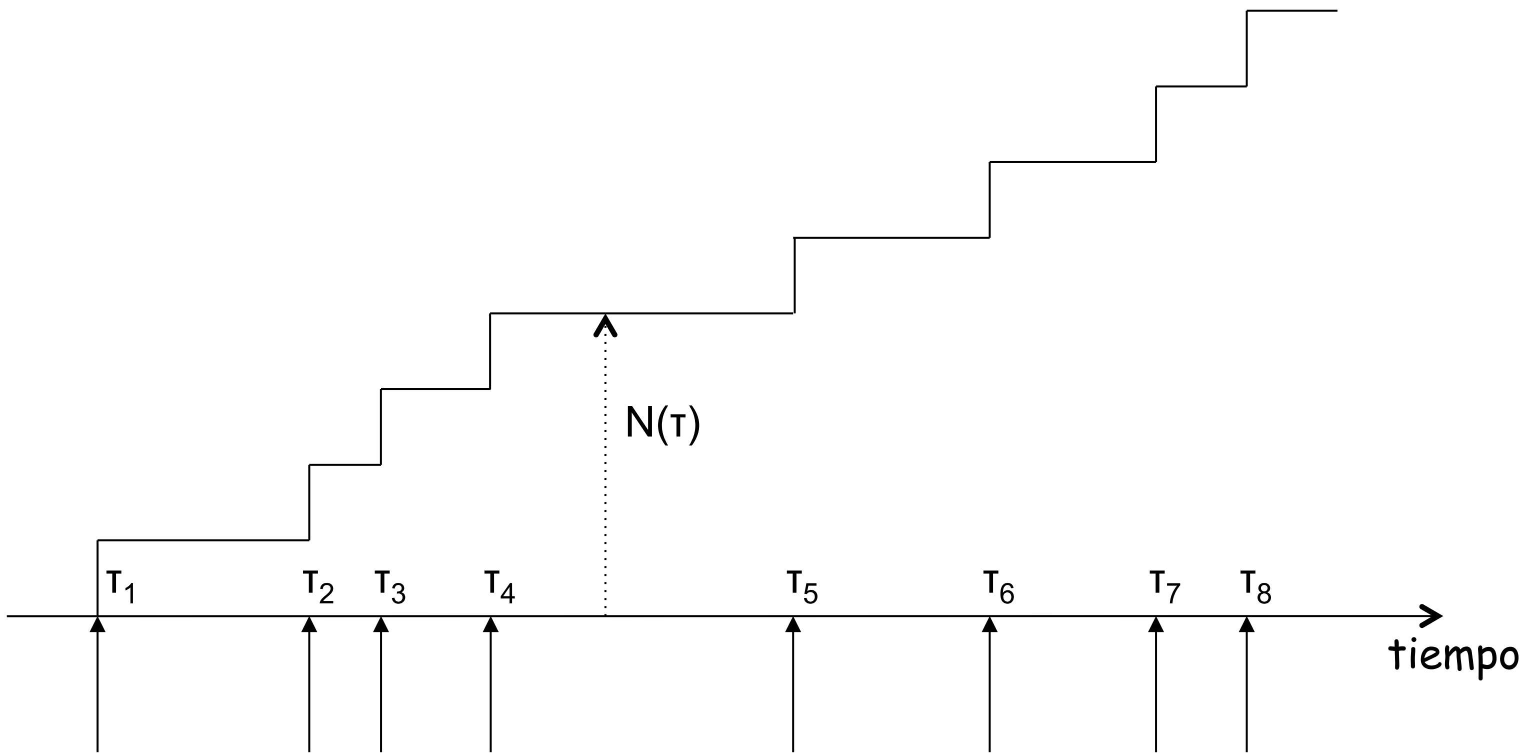
Proceso de llegadas

- *Arrival process*
- Es una secuencia de variables aleatorias $\{\tau_n\}$ crecientes
- Que sean crecientes quiere decir que el valor de una está condicionado a ser siempre mayor que el de la anterior
- Representan los instantes en que se produce algo (sean llegadas, salidas o lo que sea)
- No vamos a ver casos de múltiples llegadas simultáneas (*bulk arrivals*)



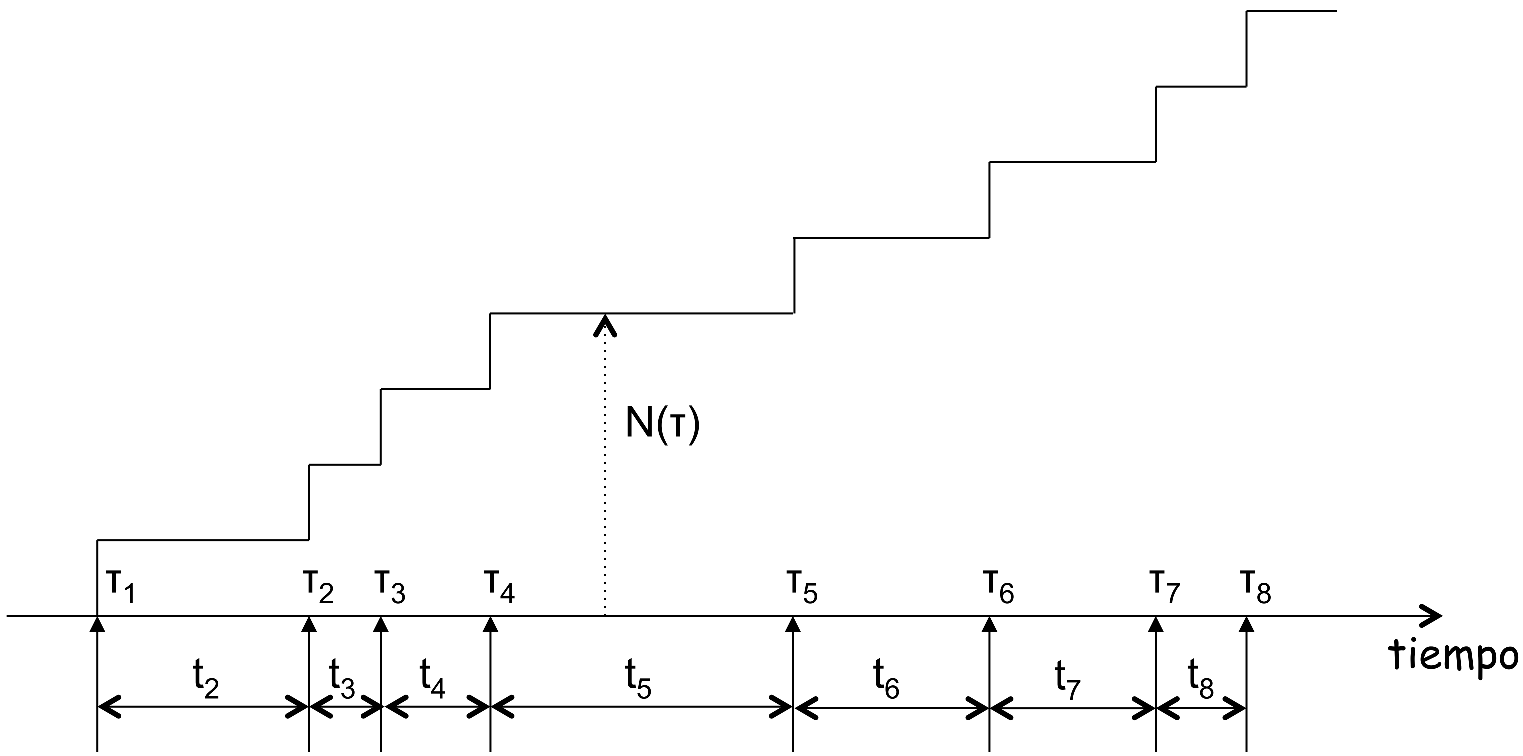
Proceso de cuenta de llegadas

- *Arrival **counting** process*
- Una representación alternativa al proceso de llegadas es {N(τ)} el número acumulado de llegadas en el intervalo (0, τ]
- Este proceso es de tiempo continuo (número infinito no contable de variables aleatorias)



Proceso de cuenta de llegadas

- *Interarrival times*
- Otra representación alternativa es $\{t_n\}$ el tiempo entre dos llegadas consecutivas
- Este proceso es de tiempo discreto (número infinito pero contable de variables aleatorias)



Procesos de Markov

- Habría que especificar la dependencia entre todas las variables mediante la función de distribución conjunta

$$P[X(\tau_1) \le x_1, X(\tau_2) \le x_2, \ldots, X(\tau_n) \le x_n]$$

- En 1907 A. A. Markov define un conjunto de procesos que se han venido a llamar "procesos de Markov" y "cadenas de Markov" (estado discreto)
- Son aquellos que cumplen que:

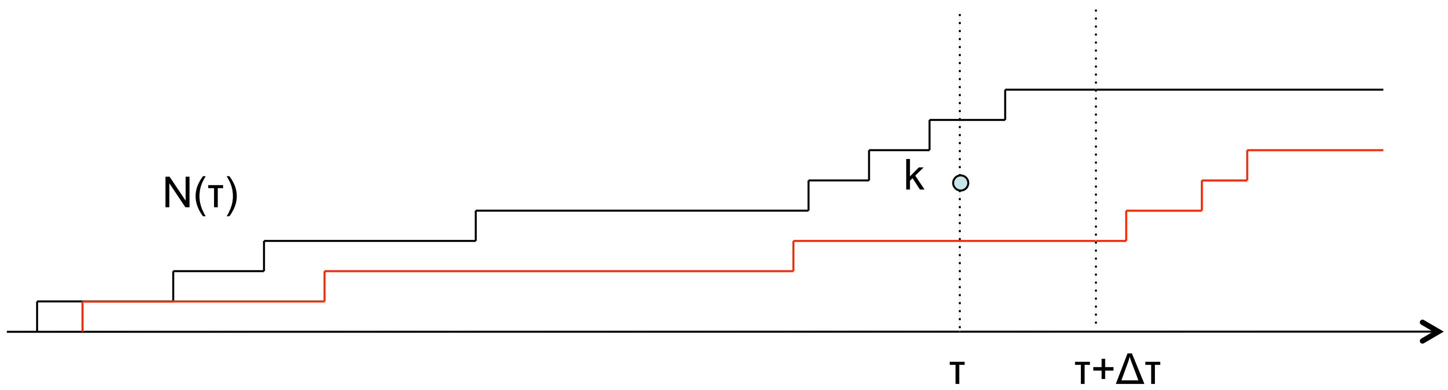
$$P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n, X(\tau_{n-1}) = x_n, \ldots, X(\tau_1) \le x_1] = P[X(\tau_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(\tau_n) = x_n]$$

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_{n+1}$$

- Es decir, el estado siguiente depende solo del estado anterior y no de toda la historia pasada
- Toda la historia se resume en el último estado observado
- Veamos un caso (…)

Proceso de nacimiento puro

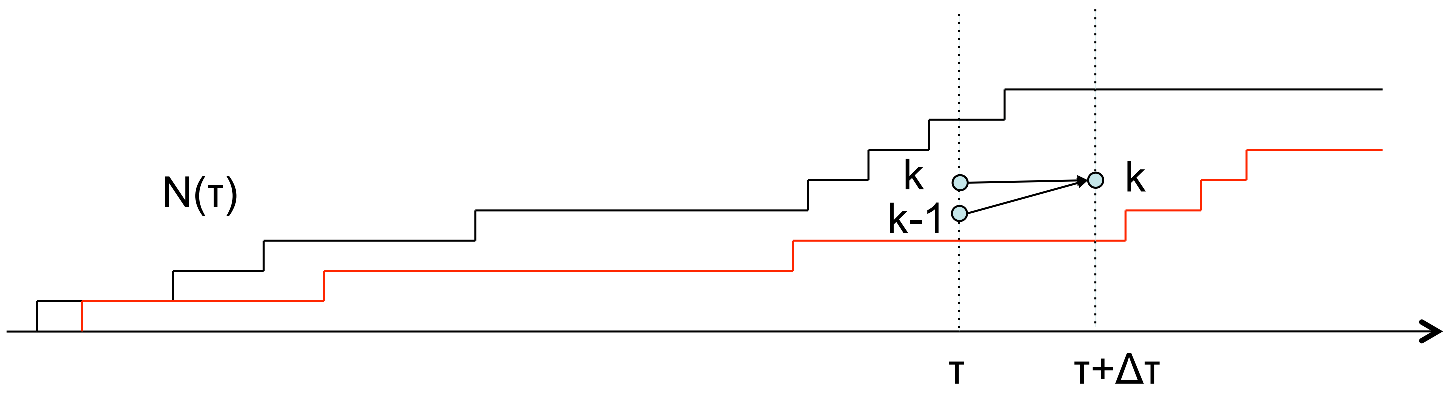
- El estado es el número de clientes en el sistema
- Llegadas (nacimientos) independientes
- Supongamos que con Δt pequeño:
- P[1 llegada en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $\lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- P[0 llegadas en $(\tau, \tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $1 - \lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- Def: $o(\Delta\tau)$ tiende a 0 más rápido que $\Delta\tau$, es decir $\lim_{\Delta\tau\to 0} o(\Delta\tau)/\Delta\tau = 0$
- $P_k(\tau)$: probabilidad de encontrarse en el estado k en el instante τ
- $p_{j,k}(\tau,\tau+\Delta\tau)$: probabilidad de encontrarse en el estado k en instante $\tau+\Delta\tau$ dado que en el instante τ se encontraba en el estado j
- $p_{j,k}(\tau,\tau+\Delta\tau) = P[\, N(\tau+\Delta\tau) = k \mid N(\tau) = j \,]$
- $p_{j,k}(\tau,\tau+\Delta\tau) = p_{j,k}(\Delta\tau)$ si el proceso es homogéneo (no cambia su comportamiento con el tiempo)



Proceso de nacimiento puro

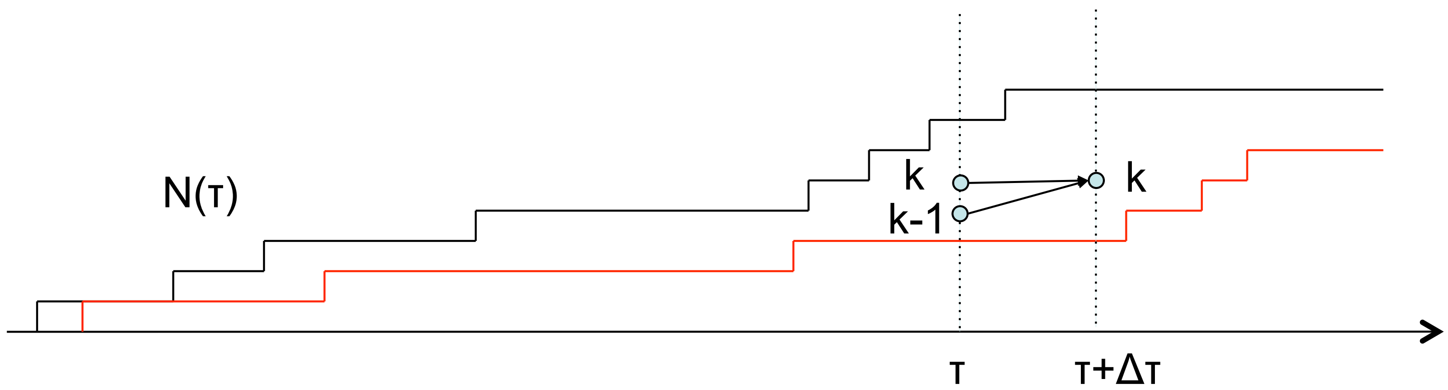
- $p_{j,k}(\tau,\tau+\Delta\tau) = p_{j,k}(\Delta\tau)$ si el proceso es homogéneo (no cambia su comportamiento con el tiempo)
- $P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)p_{k,k}(\Delta\tau) + P_{k-1}(\tau)p_{k-1,k}(\Delta\tau) =$
- $= P_k(\tau)\ (1 - \lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\ (\lambda_{k-1}\Delta\tau + o(\Delta\tau))$

P[1 llegada en $(\tau,\tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $\lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
P[0 llegadas en $(\tau,\tau+\Delta\tau)$ | k en el sistema] = $1 - \lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)$



Proceso de nacimiento puro

- $p_{j,k}(\tau,\tau+\Delta\tau) = p_{j,k}(\Delta\tau)$ si el proceso es homogéneo (no cambia su comportamiento con el tiempo)
- $P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)p_{k,k}(\Delta\tau) + P_{k-1}(\tau)p_{k-1,k}(\Delta\tau) =$
- $= P_k(\tau)\ (1 - \lambda_k\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\ (\lambda_{k-1}\Delta\tau + o(\Delta\tau)) =$
- $= P_k(\tau) - \lambda_k P_k(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$



Proceso de nacimiento puro

- $P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau) - \lambda_k P_k(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
- $P_k(\tau+\Delta\tau) - P_k(\tau) = -\lambda_k P_k(\tau)\Delta\tau + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$

$$\frac{P_k(\tau+\Delta\tau) - P_k(\tau)}{\Delta\tau} = -\lambda_k P_k(\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \qquad k\geq 1$$

- Si $\Delta\tau \rightarrow 0$ entonces lo de la izquierda es la derivada y la $o(\Delta\tau)/\Delta\tau \rightarrow 0$:

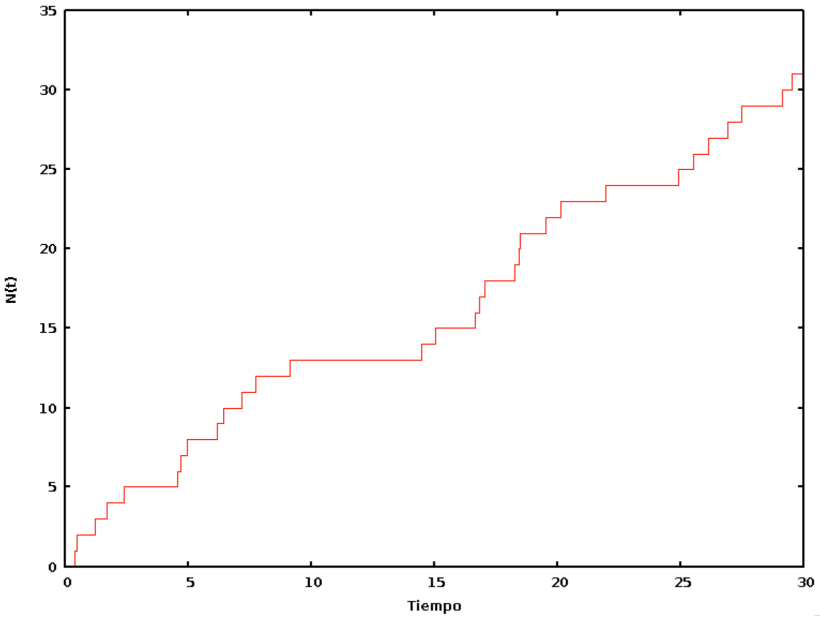
  $dP_k(\tau)/d\tau = -\lambda_k P_k(\tau) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(\tau)$
- Con la salvedad de k=0 para el que no existe el estado k-1 :

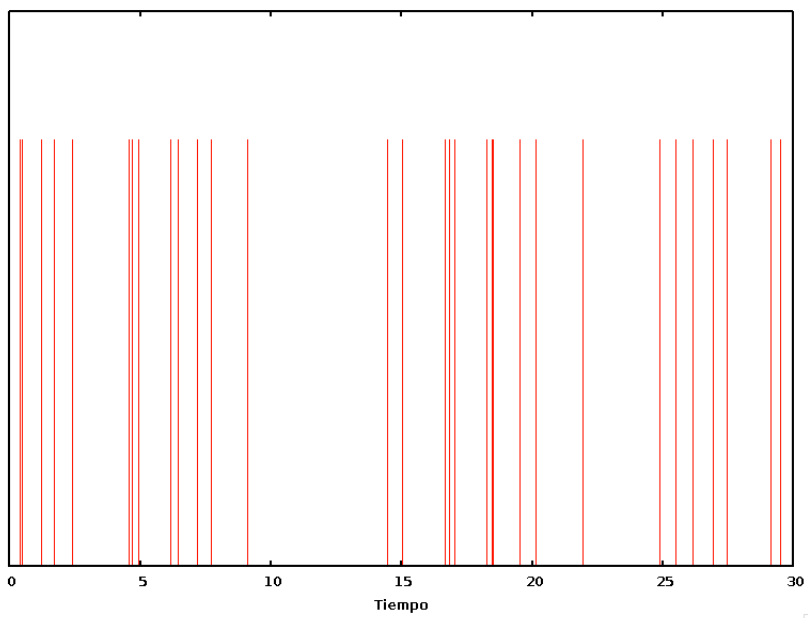
  $dP_0(\tau)/d\tau = -\lambda_0 P_0(\tau)$
- Para simplificar supondremos que $\lambda_k=\lambda$ (tasa de nacimientos cte.)
- Y que el sistema empieza con 0 llegadas:
- $P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0$
- Con eso $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$
- Sustituyendo: $dP_1(\tau)/d\tau = -\lambda P_1(\tau) + \lambda e^{-\lambda\tau}$
- Resolviendo: $P_1(\tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$
- Y continuando por inducción: $P_k(\tau) = \dfrac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$

Proceso de Poisson

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

- Esto es el { N(τ) } pues para cada τ hay una variable aleatoria
- Esa variable aleatoria sigue la distribución de **Poisson**
- Nos da la probabilidad de un número de llegadas en un intervalo (0,τ]





Poisson: momentos

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

- Esto es el { N(τ) } pues para cada τ hay una variable aleatoria
- Esa variable aleatoria sigue la distribución de **Poisson**
- Nos da la probabilidad de un número de llegadas en un intervalo (0,τ]
- La media de una de las variables N(τ) es:

$$E[N(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} kP[N(\tau)=k] = \left(0 + \lambda\tau + (\lambda\tau)^2 + \frac{(\lambda\tau)^3}{2} + \frac{(\lambda\tau)^4}{6}\dots\right)e^{-\lambda\tau} =$$

$$= \lambda\tau\left(1 + \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2} + \frac{(\lambda\tau)^3}{6}\dots\right)e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau e^{\lambda\tau}e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau$$

- Es decir, en el intervalo (0,τ] se producen en media λτ llegadas
- λ es el número medio de llegadas por unidad de tiempo

Poisson: momentos

- La varianza es también: $$\sigma^2_{X(\tau)} = \lambda\tau$$
- Con lo que la desviación estándar normalizada respecto a la media es: $$\frac{\sigma_{X(\tau)}}{E[N(\tau)]} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\tau}}$$
- Lo cual implica que a medida que τ crece, la distribución se encuentra más concentrada alrededor de la media
- Así, medir en número de llegadas en un intervalo “muy grande” es una buena estimación de esa media
- Dividir esa medida por la duración de ese intervalo es una buena estimación de λ