Dimensionado en telefonía

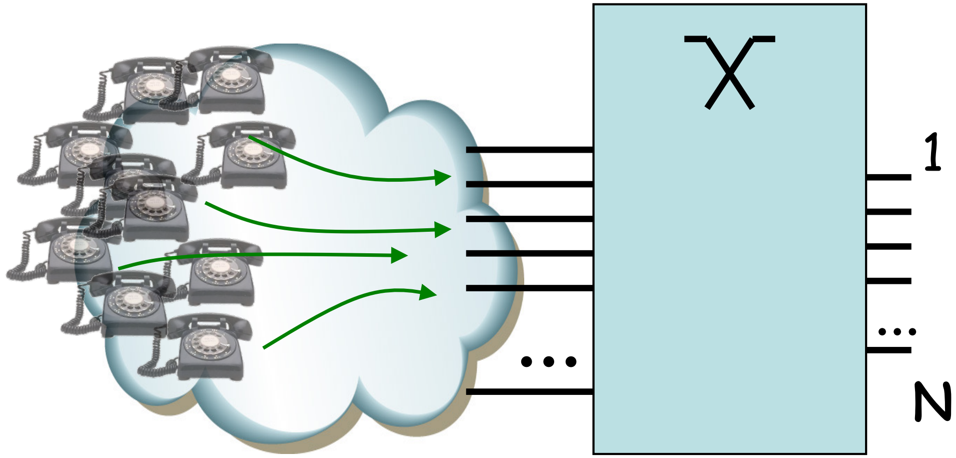
Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Arquitectura de Redes, Sistemas y Servicios

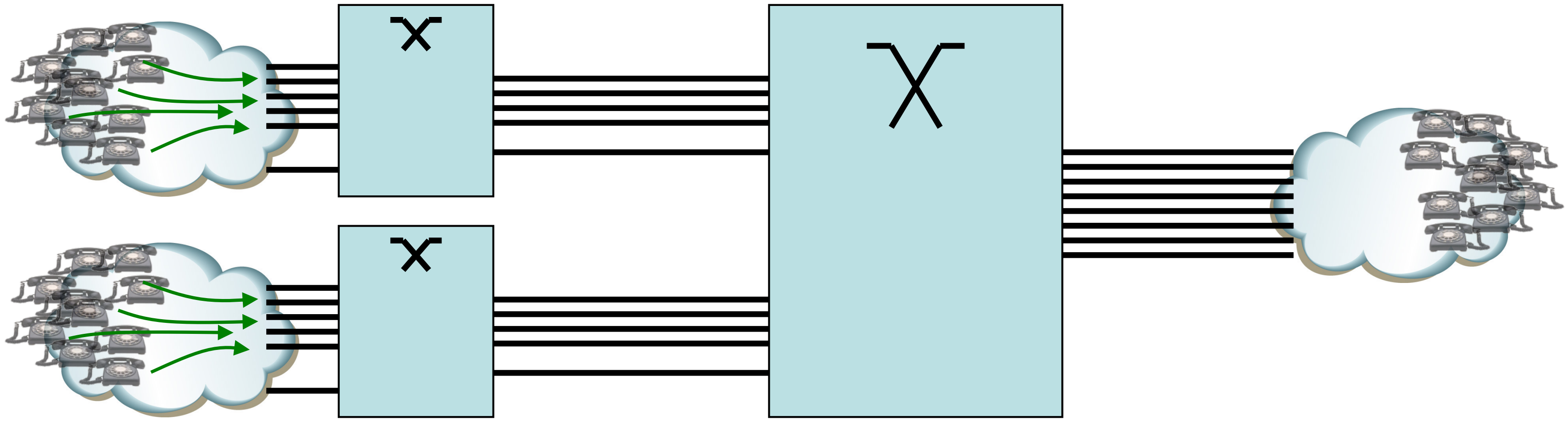
Problema y modelo

Problema tipo a resolver

- Conmutador con líneas de entrada y de salida



- Extensión:



Caracterización estadística

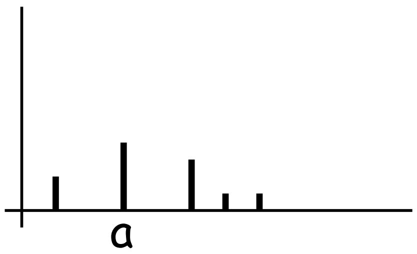
Modelando la carga

Variable aleatoria (V)

- No tiene un valor sino que describe el resultado aleatorio de un experimento
- Se caracteriza por la descripción de los posibles resultados que puede tomar en términos de probabilidad
- **Función de distribución / densidad de probabilidad**

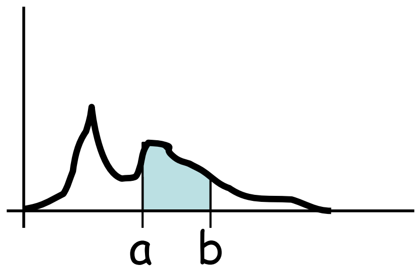
Variable discreta

$$p(a) = P[V = a]$$



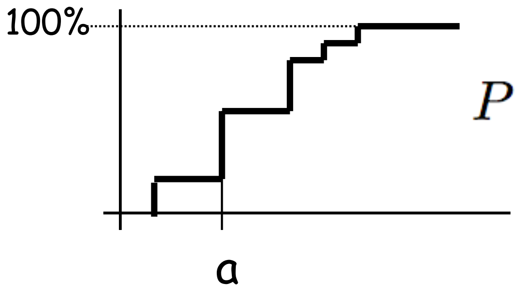
Variable continua

$$P[a < V < b] = \int_a^b p(t)dt$$



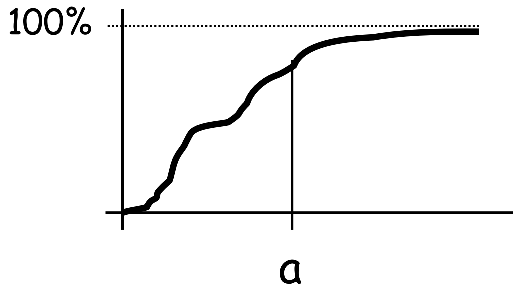
- **Función acumulada de probabilidad / distribución**

Variable discreta



$$P[V \leq a] = F(a)$$

Variable continua



Modelando la carga

Procesos estocásticos (V)

- Una familia de variables aleatorias

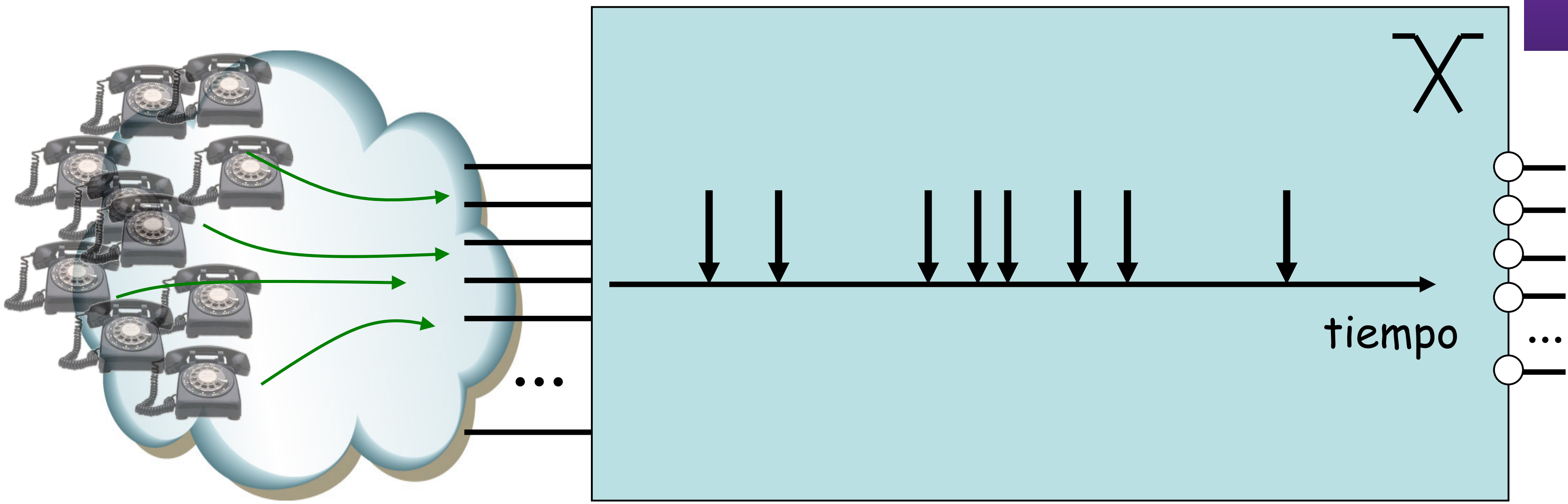
$$\{X_t : t \in T\}$$

- Hablaremos de
  - “Tiempo continuo” cuando T es real, por ejemplo T = [0,∞]
  - “Tiempo discreto” cuando T es numerable, por ejemplo T = {0,1,2…}

Proceso de llegadas

Proceso de llegadas

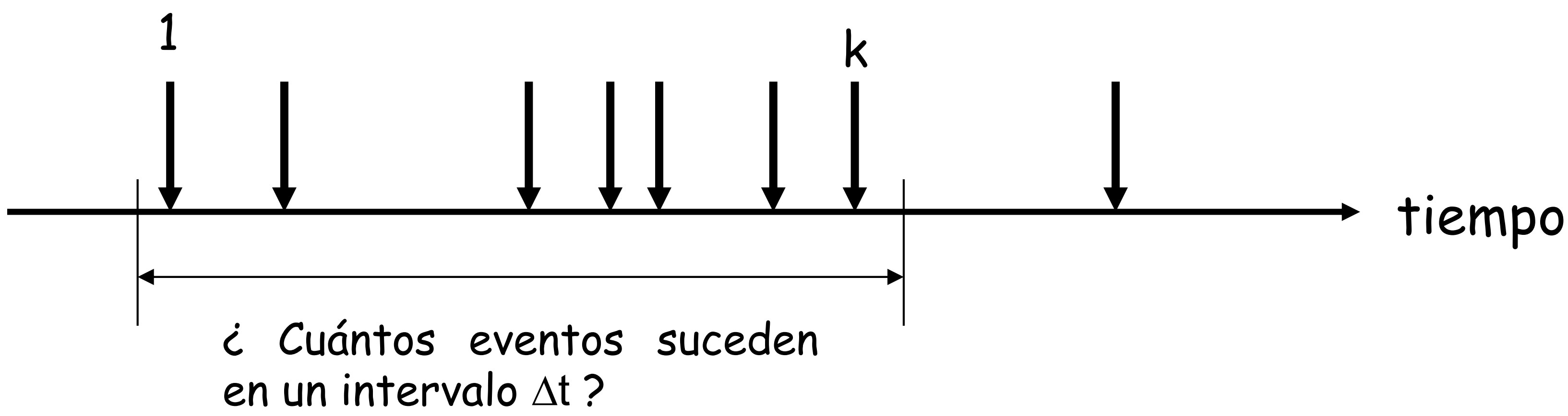
- Hipótesis fundamental en teoría clásica: llegadas independientes
- Tasa media de llegadas de llamadas de una gran población de fuentes (usuarios) independientes: λ



Número de llegadas

- Hipótesis:
  - En un intervalo suficientemente pequeño solo puede producirse una llegada
  - La probabilidad de una llegada en un intervalo suficientemente pequeño es directamente proporcional a la longitud del mismo (probabilidad $\lambda\Delta t$)
  - La probabilidad de una llegada en un intervalo es independiente de lo que suceda en otros intervalos
- Se demuestra que el número de llegadas en un intervalo sigue una distribución de Poisson

$$P_{\lambda\Delta t}[N = k] = \frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta t}$$



Tiempos entre llegadas

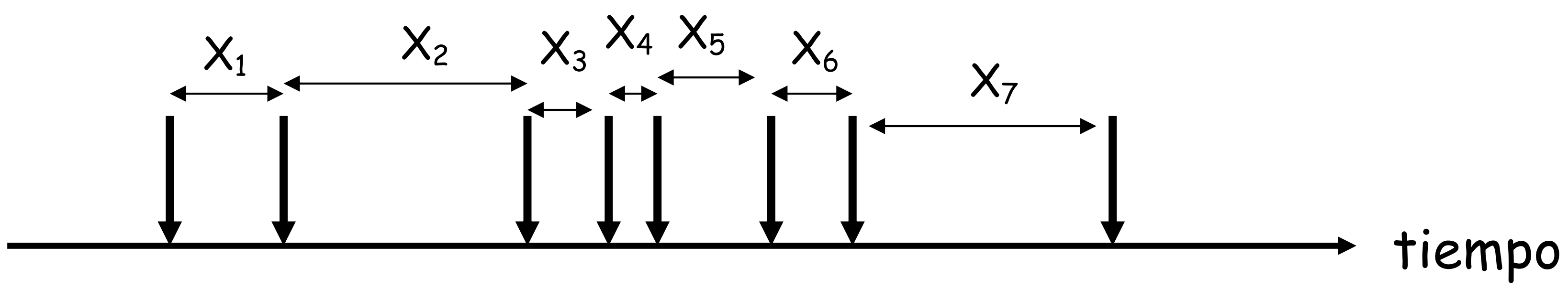
- Se demuestra que: si el número de eventos que ocurren en un intervalo cualquiera sigue una distribución de Poisson, los tiempos entre llegadas de eventos siguen una distribución exponencial
- El tiempo entre llegadas sigue una v.a. exponencial de parámetro λ
- X_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) ('X')

$$\boxed{p_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{(t>0)}}$$

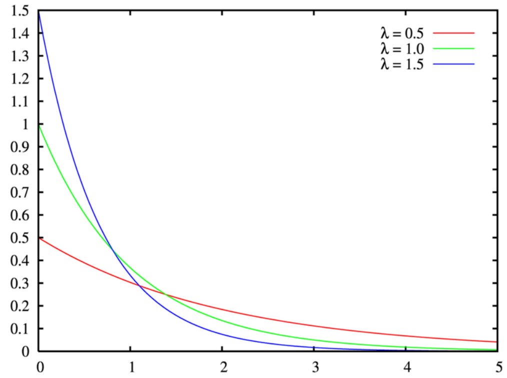
$$P[X < t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

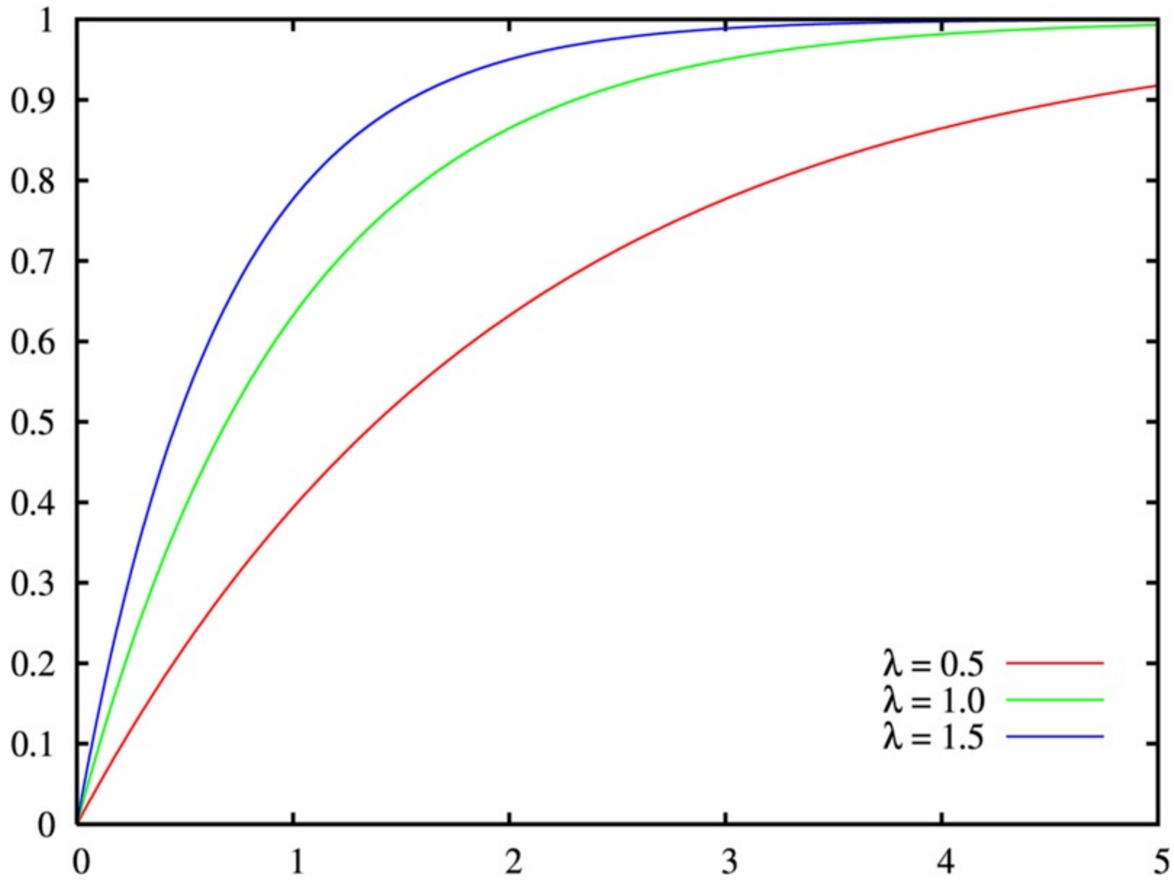
- Media: $E[X] = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} = 1/\lambda$

- Tiempo medio entre llegadas 1/λ ⇒ en media λ llegadas por segundo

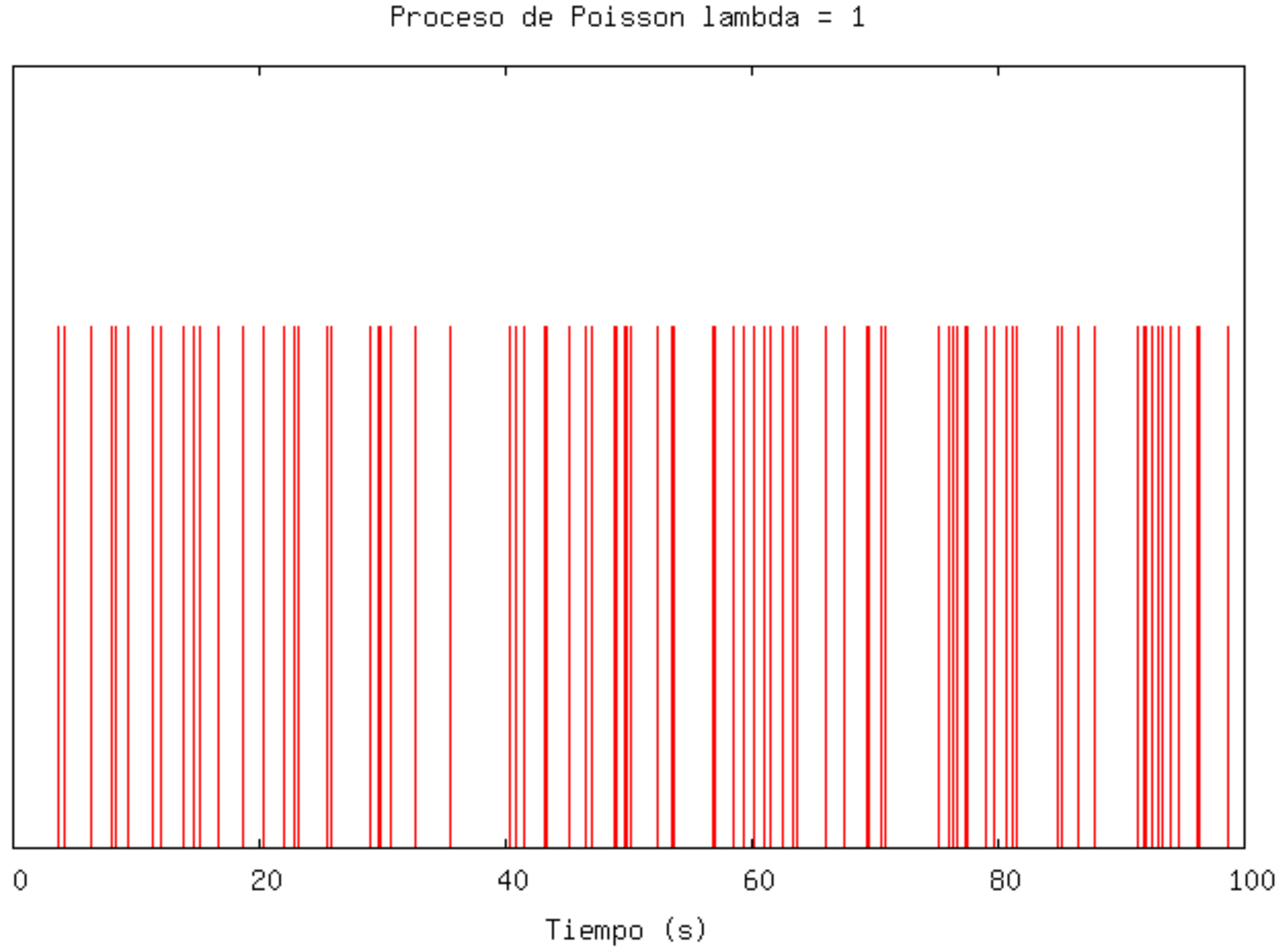


Ejemplo (exponencial)





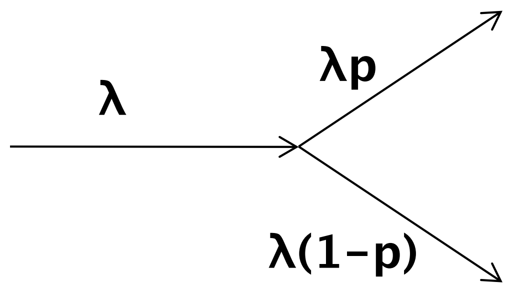
Ejemplo (proceso de Poisson)



Propiedades del proceso de Poisson

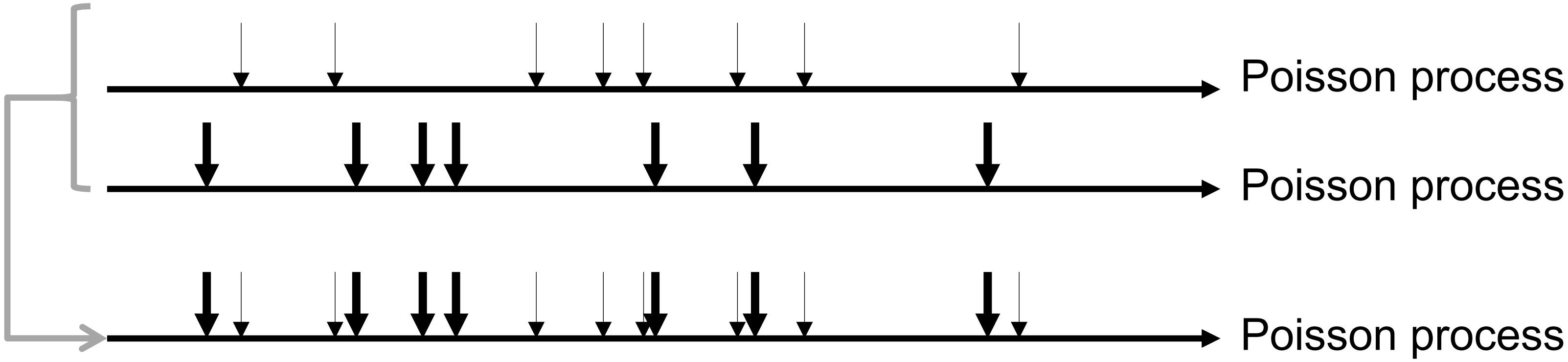
Random splitting

- Proceso de Poisson con tasa λ
- Repartidas las llegadas en dos grupos mediante Bernoulli de parámetro p
- Los procesos resultantes son procesos de Poisson de tasas λp y λ(1-p)



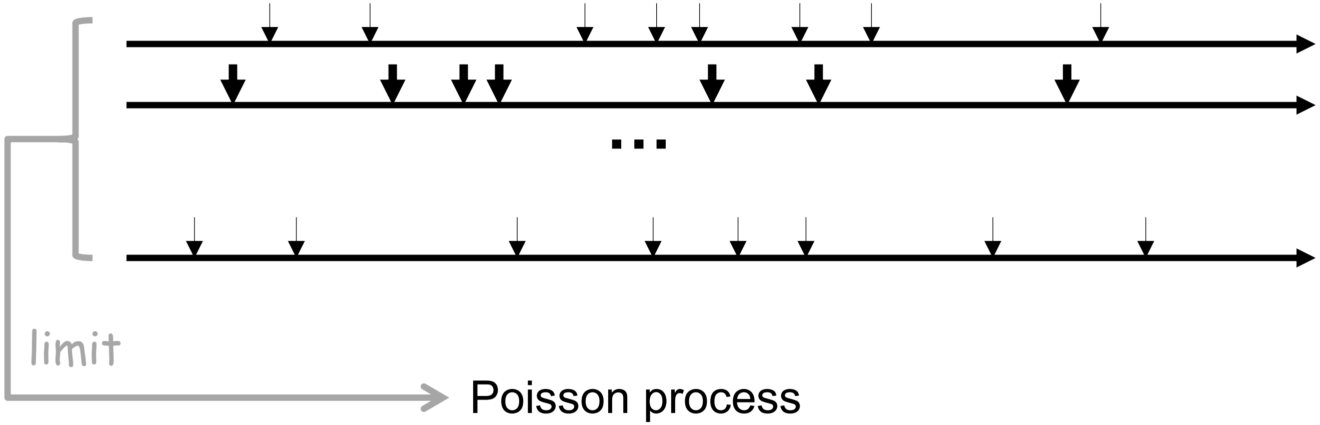
Superposición

- La superposición de dos procesos de Poisson es un proceso de Poisson de tasa la suma de las dos (…)



Superposición

- Para ciertos procesos muy comunes (independientes), la superposición de un gran número de ellos tiende a un proceso de Poisson



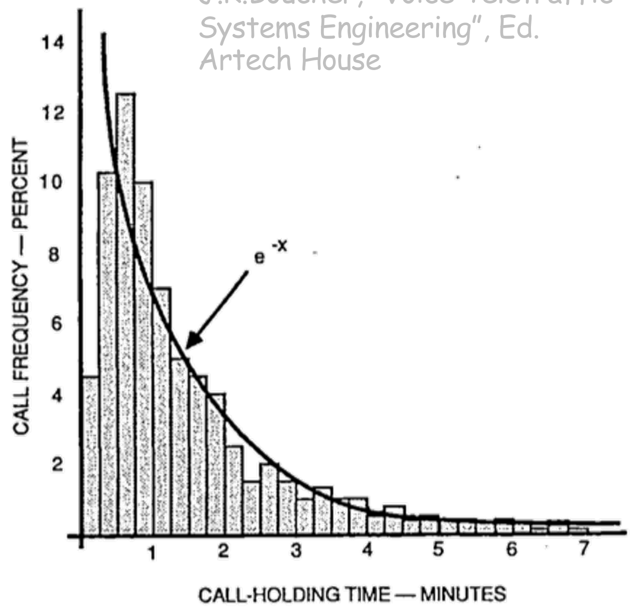
- Las peticiones de usuarios individuales es probable que no se puedan modelar con un proceso de Poisson
- El múltiplex de un gran número de usuarios independientes sí

Duración de las llamadas

Tiempo de ocupación

- Duración de las llamadas
- Lo más simple: tiempo constante
  - Poco realista para llamadas
  - Actividades automáticas: reproducción de mensajes, procesado de señalización, etc.
- Tiempo exponencial
  - Variables aleatorias (continuas) ‘s_i’
  - i.i.d. (‘s’)
  - Tiempos menores de la media muy comunes
  - Cada vez menos comunes tiempos mayores que la media
  - Propiedad: el tiempo restante de una llamada es independiente de lo que haya durado hasta ahora
- Duración exponencial: ‘s’ caracterizada por su función de densidad

J.R.Boucher, "Voice Teletraffic Systems Engineering", Ed. Artech House



$$p_s(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad \text{(t>0)}$$

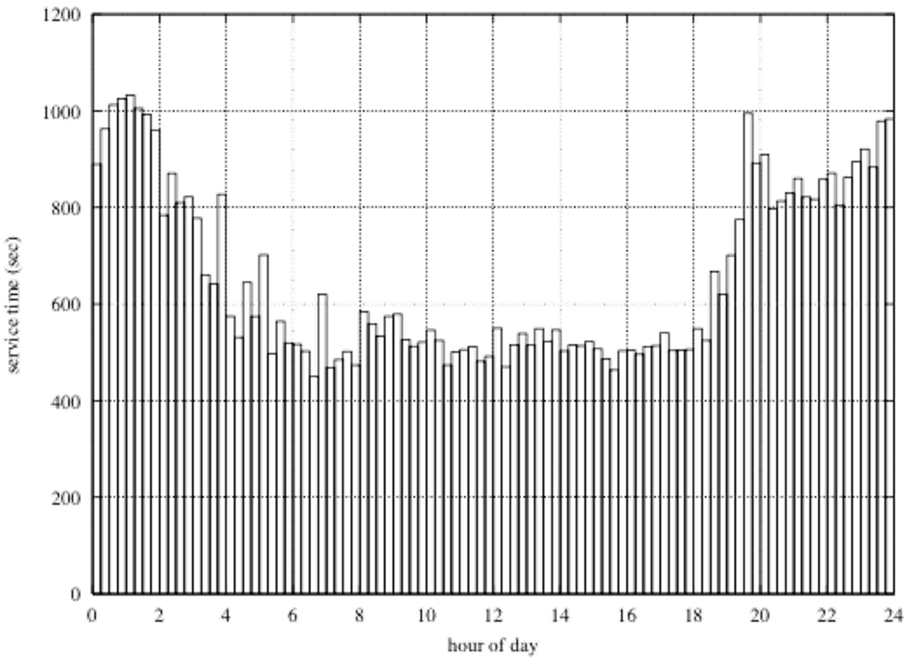
$$\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} = 1$$ es una fdp

$$\bar{s} = E[s] = {}^{1}/_{\mu}$$

Tiempo de ocupación

- La duración media de las llamadas también tiene cierta variación con la hora del día

Llamadas de voz



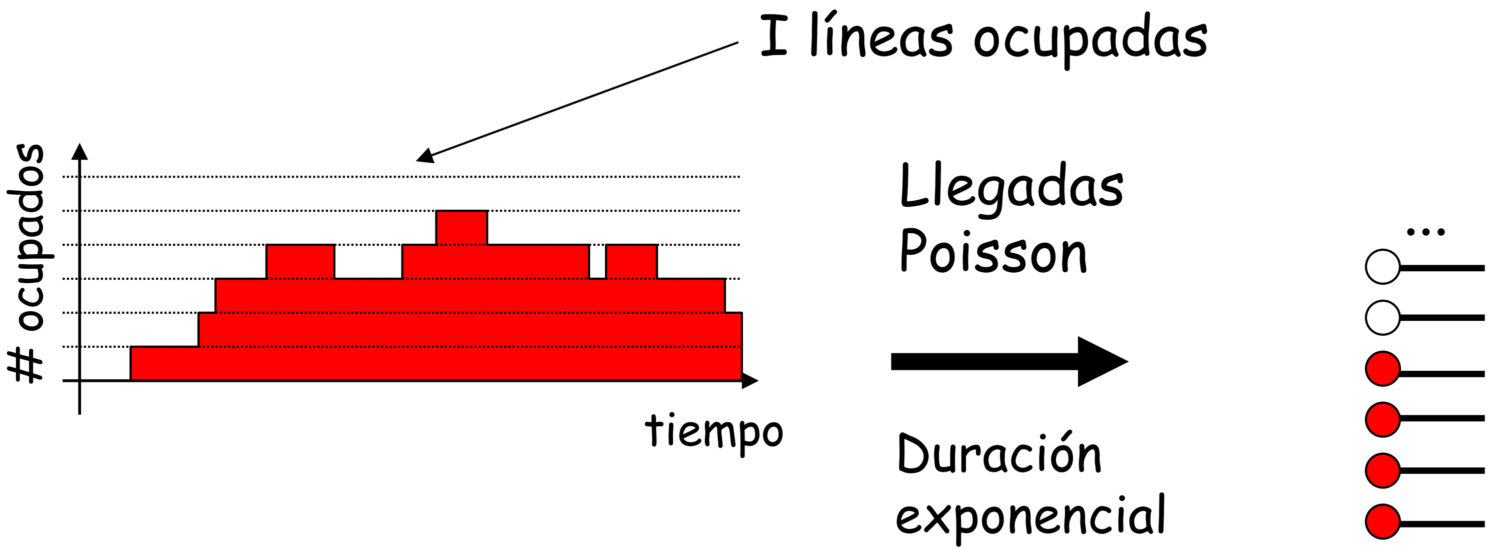
Llamadas de modem

http://www.itu.int/ITU-D/study_groups/SGP_1998-2002/SG2/StudyQuestions/Question_16/RapporteursGroupDocs/teletraffic.pdf

Erlang-B

Comportamiento

- Llegadas según proceso de Poisson de tasa λ
- Duración exponencial de media s
- Número de servidores (líneas ocupados) en cada instante de tiempo es aleatorio (I)



Problemas de interés

- ¿ Cuál es la probabilidad de que una llamada encuentre el sistema ocupado ?
- ¿ Cuál es el número de líneas necesarias para una probabilidad objetivo ?
- ¿ Cuál es el tráfico que atraviesa ese sistema y forma la carga del siguiente sistema ?

Probabilidad de bloqueo

- En un sistema con
  - Llegadas Poisson(λ)
  - Duraciones Exp(1/s)
  - Tráfico de entrada A = λs
  - k servidores
  - Las llamadas que llegan al sistema bloqueado se pierden
  - Probabilidad de bloqueo: ¿Cuál es P[I=k]? (…)
- $P[I=k] = B(a,k)$
- $B(a,k)$ es conocida como función B de Erlang (o ErlangB)
- Válida con cualquier distribución de tiempo de servicio (i.i.d.)
- Tablas: http://www.itu.int/itudoc/itu-d/dept/psp/ssb/planitu/plandoc/erlangt-es.html

B de Erlang

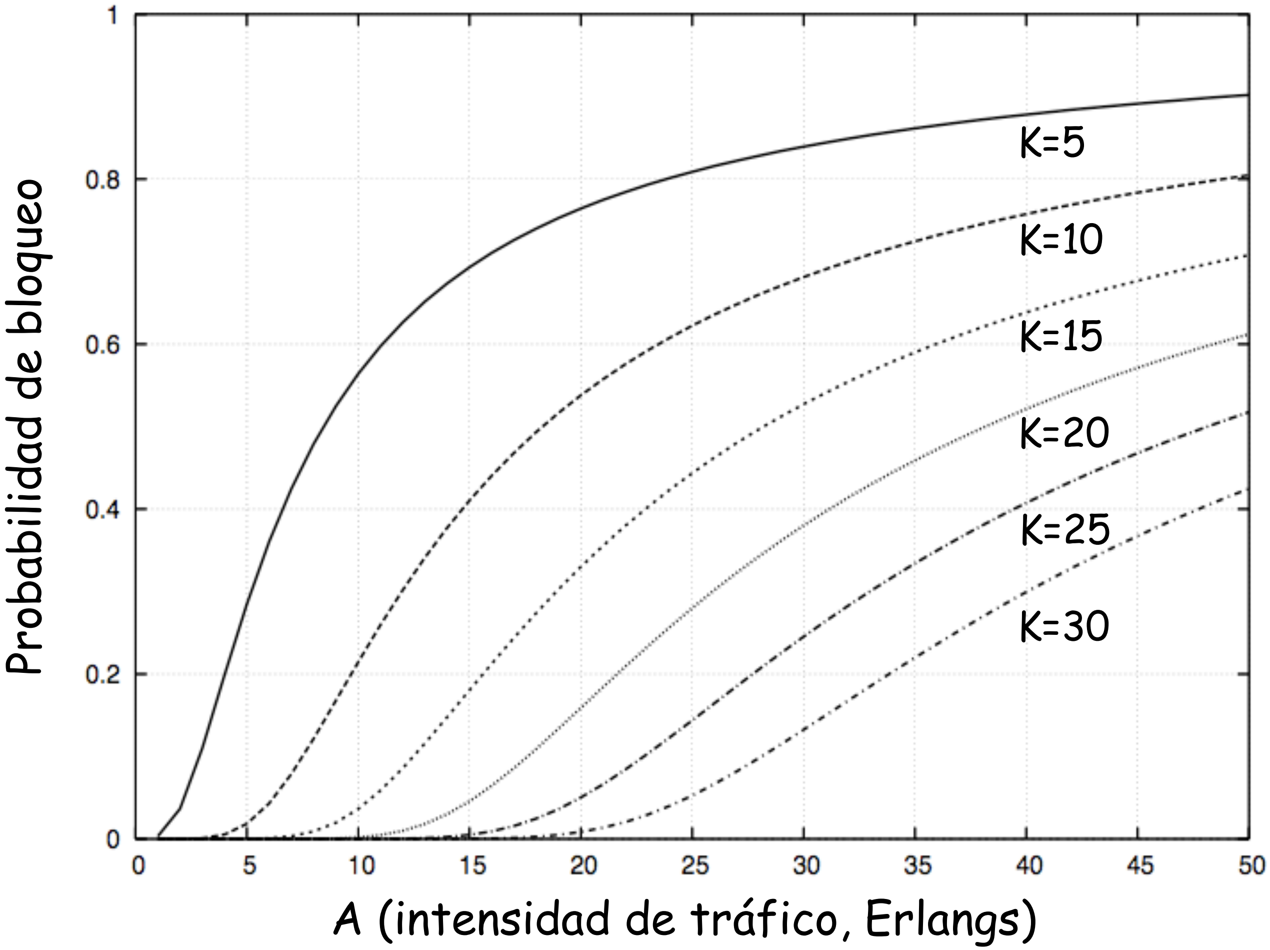
- Fórmula:

$$B(A,k) = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{k} A^i/i!}$$

- Cálculo recursivo:

$$B(A,0) = 1$$

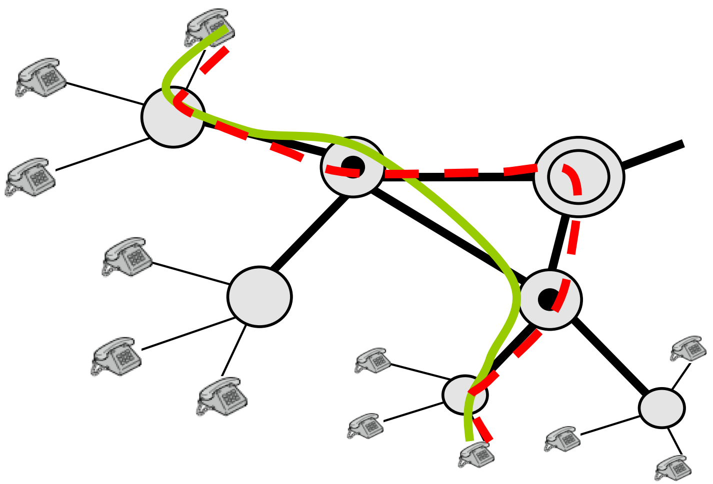
$$B(A,j) = \frac{A \cdot B(A,j-1)}{A \cdot B(A,j-1) + j}$$

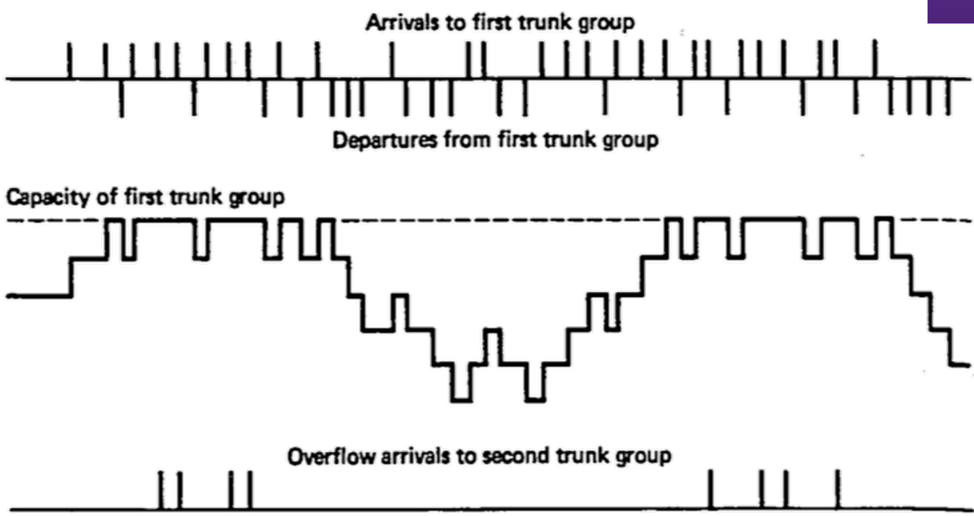


Tráfico de desbordamiento

Tráfico de desbordamiento

- Tráfico que no puede ser cursado por el camino principal (por bloqueo)
- Se “desborda” (overflow) a una ruta secundaria
- Un proceso de Poisson del que se eliminan aleatoriamente (iid) muestras con probabilidad p sigue siendo un proceso de Poisson, pero con menor tasa ($p\lambda$)
- En nuestro caso las llamadas desbordadas suelen ir en bloques
- Eso da mayores probabilidades de bloqueo que con un proceso de Poisson de igual media
- Se aproxima con un proceso de Poisson de mayor tasa
- (En los problemas, en caso de no disponer de las tablas emplearemos Poisson de igual tasa, aunque esto es subdimensionar)





Mayor complejidad

- *¿ Qué ocurre si las llamadas se retienen hasta que sean atendidas ?*

  Teoría de colas (función C de Erlang)

- *¿ Qué ocurre si tenemos en cuenta que hay un número finito (y conocido) de usuarios ?*

  Fórmula de Engset

Preguntas pendientes

- *¿Y en el caso de conmutación de paquetes?*
  - Teoría de colas
  - Problemas más complicados
  - Peores aproximaciones
  - Mayor número de problemas sin resolver