

# Cálculo de bloqueo en la RTB

Area de Ingeniería Telemática  
<http://www.tlm.unavarra.es>

Arquitectura de Redes, Sistemas y Servicios  
Grado en Ingeniería en Tecnologías de  
Telecomunicación, 2º

# Temario

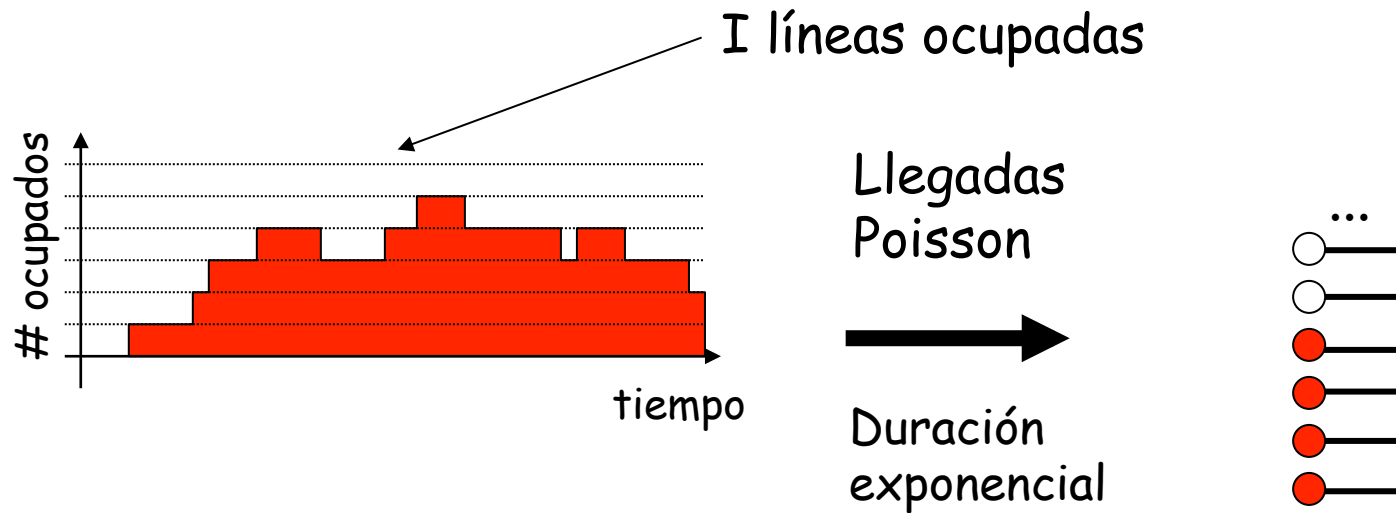
1. Introducción
2. Arquitecturas de conmutación y protocolos
3. Introducción a las tecnologías de red
4. Control de acceso al medio
5. **Conmutación de circuitos**
  1. La Red Telefónica Básica
  2. Modelado de usuarios
  3. Cálculos de bloqueo
6. Transporte fiable
7. Encaminamiento
8. Programación para redes y servicios

# Objetivos

- Conocer y aplicar el cálculo de probabilidades de bloqueo empleando la Erlang-B

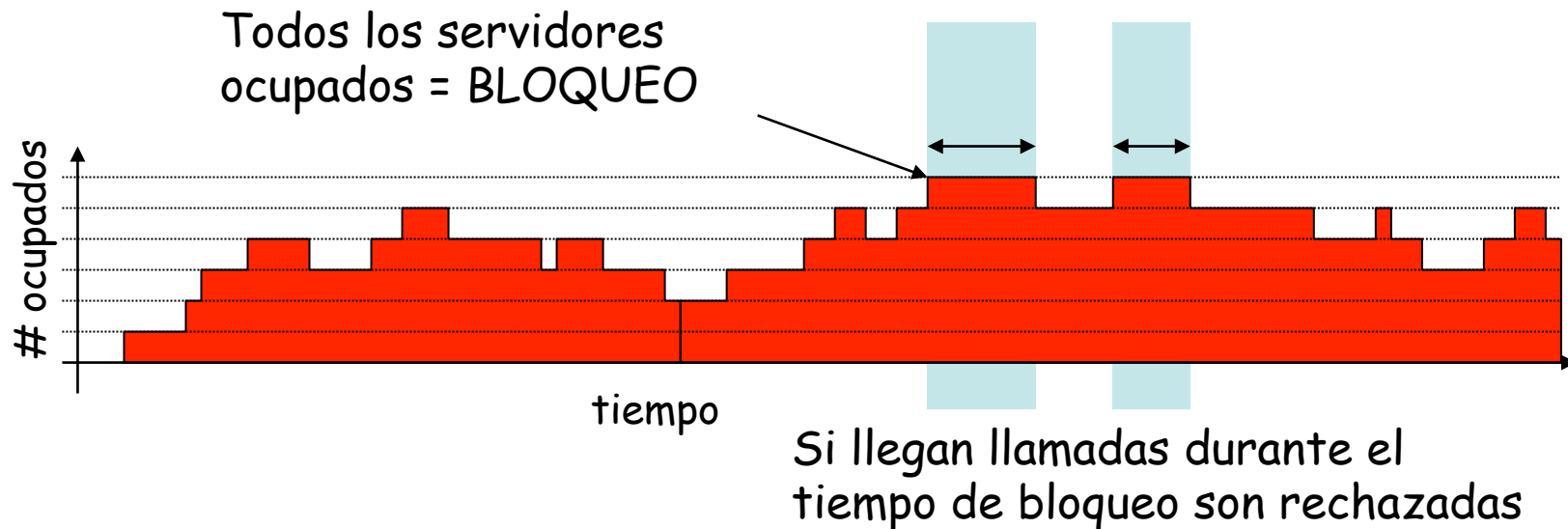
# Probabilidad de bloqueo

- Llegadas según proceso de Poisson de tasa  $\lambda$
- Duración exponencial de media  $s$
- Número de servidores ocupados en cada instante de tiempo es aleatorio ( $I$ )



# Probabilidad de bloqueo

- Normalmente dispondremos de recursos finitos (capacidad)
- Cuando la variable  $I$  toma valor = número de servidores, el sistema está en BLOQUEO
- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté en situación de bloqueo ?



# Problemas de interés

- ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada encuentre el sistema ocupado ?
- ¿Cuál es el número de líneas necesarias para una probabilidad objetivo ?
- ¿Cuál es el tráfico que atraviesa ese sistema y forma la carga del siguiente sistema ?

# Probabilidad de bloqueo

- En un sistema con
  - Llegadas Poisson( $\lambda$ )
  - Duraciones Exp( $1/s$ )
  - Tráfico de entrada  $A = \lambda s$
  - $k$  servidores
  - Las llamadas que llegan al sistema bloqueado se pierden
  - Probabilidad de bloqueo: ¿Cuál es  $P[I=n]$ ? (...)
- $P[I=n] = B(a,k)$
- $B(a,k)$  es conocida como función B de Erlang (o ErlangB)
- Válida con cualquier distribución de tiempo de servicio (i.i.d.)

# B de Erlang

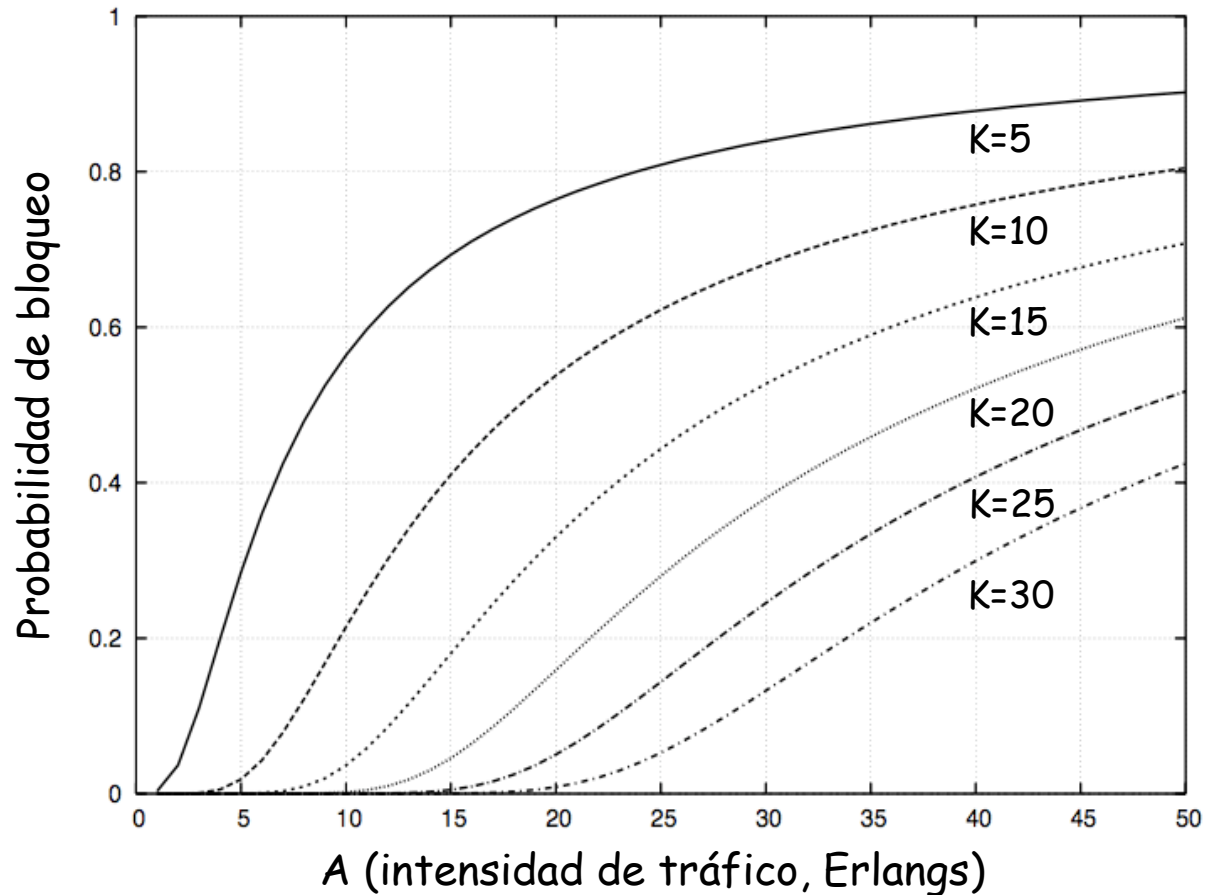
- Fórmula:

$$B(A,k) = \frac{A^k}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!}$$

- Cálculo recursivo:

$$B(A,0) = 1$$

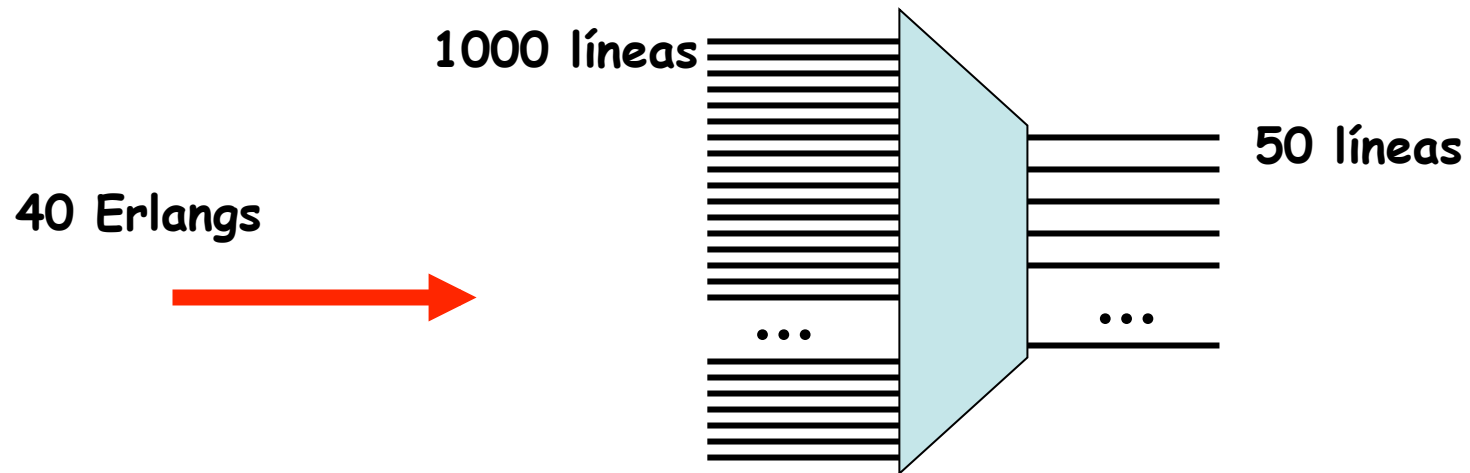
$$B(A,j) = \frac{A \cdot B(A,j-1)}{A \cdot B(A,j-1) + j}$$





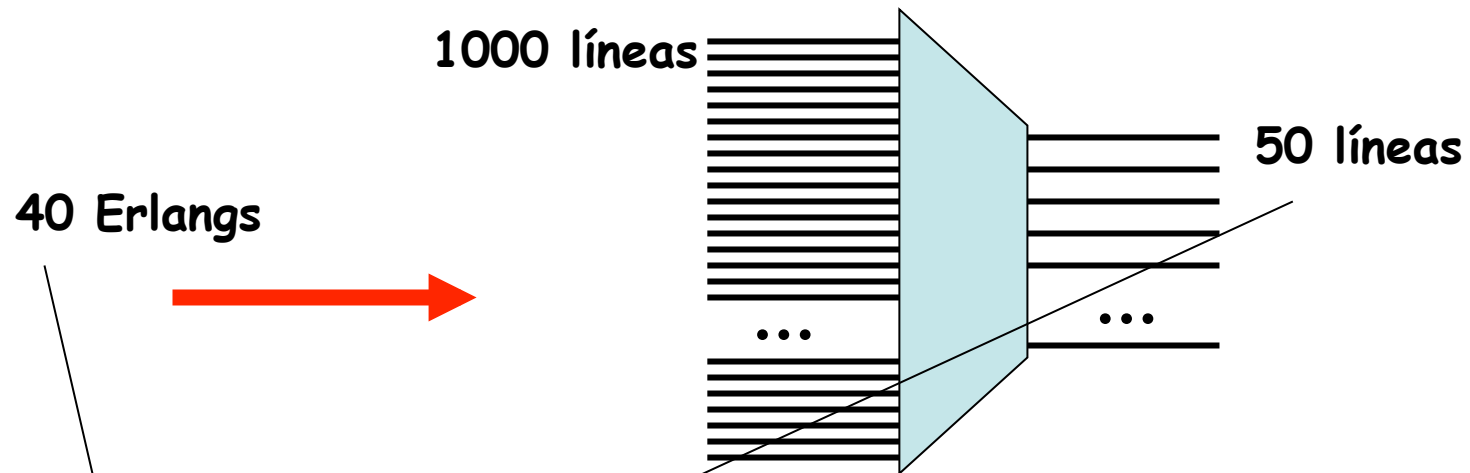
# Ejemplo

- 1000 líneas llegan a un concentrador que selecciona 50 para entrar a una centralita
- Los usuarios generan un tráfico de 40 Erlangs
- ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo ?



# Ejemplo

- 1000 líneas llegan a un concentrador que selecciona 50 para entrar a una centralita
- Los usuarios generan un tráfico de 40 Erlangs
- ¿Cuál es la probabilidad de bloqueo ?

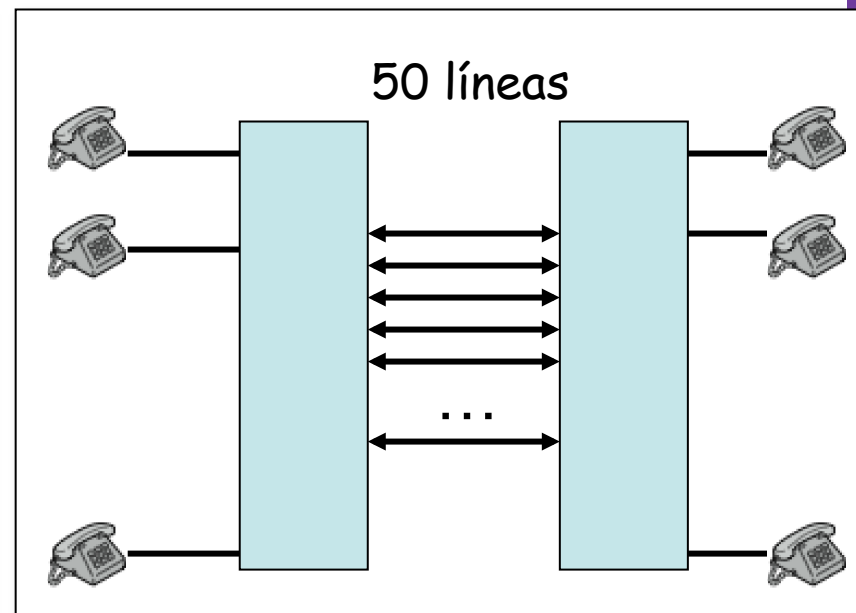
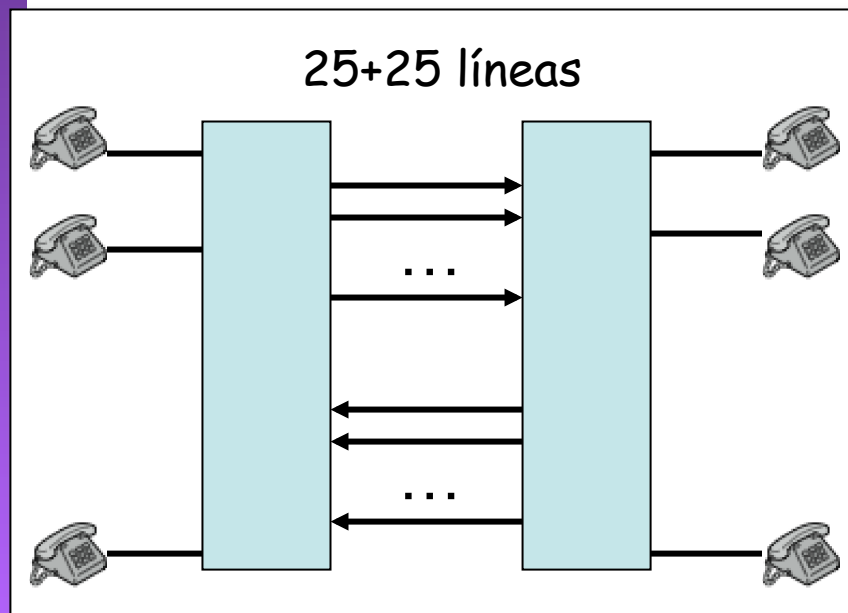


- La probabilidad de bloqueo es

$$P_b = B(40, 50) = 0.0187 \quad \text{casi un 2\%}$$

# Ejercicio

- Entre dos centralitas tenemos la posibilidad de:
  - asignar 25 troncales para llamadas salientes de A y 25 troncales para llamadas entrantes a A
  - O bien asignar las 50 troncales para que se puedan usar indistintamente en llamadas en cualquier dirección
- ¿ Qué es mejor ?
- (...)



# Ejercicio

- Suponiendo que el tráfico que intenta ir de B a A es el mismo que el de A a B, llamémosle  $I$  (pongamos 15 erlangs)

- Probabilidad de bloqueo en el caso 1:

$$P_b(A \rightarrow B) = B(I, 25)$$

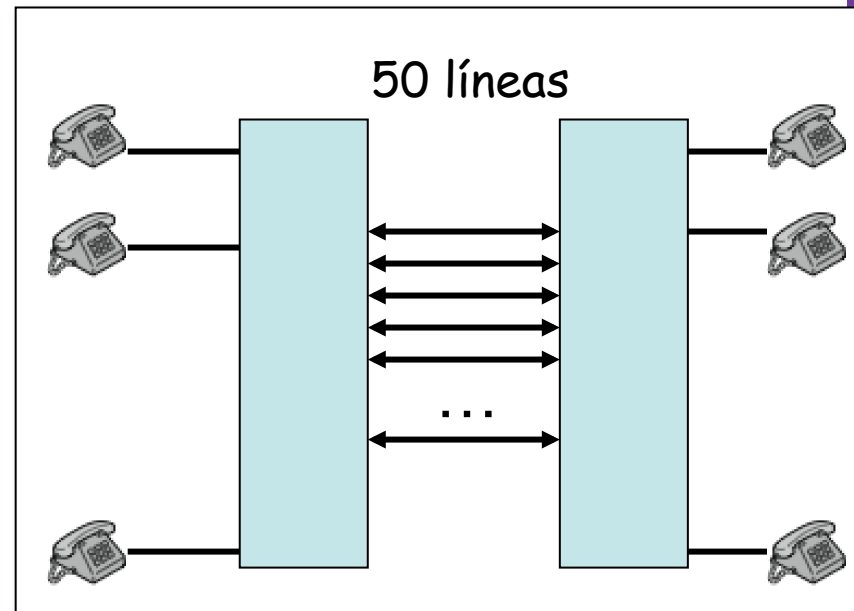
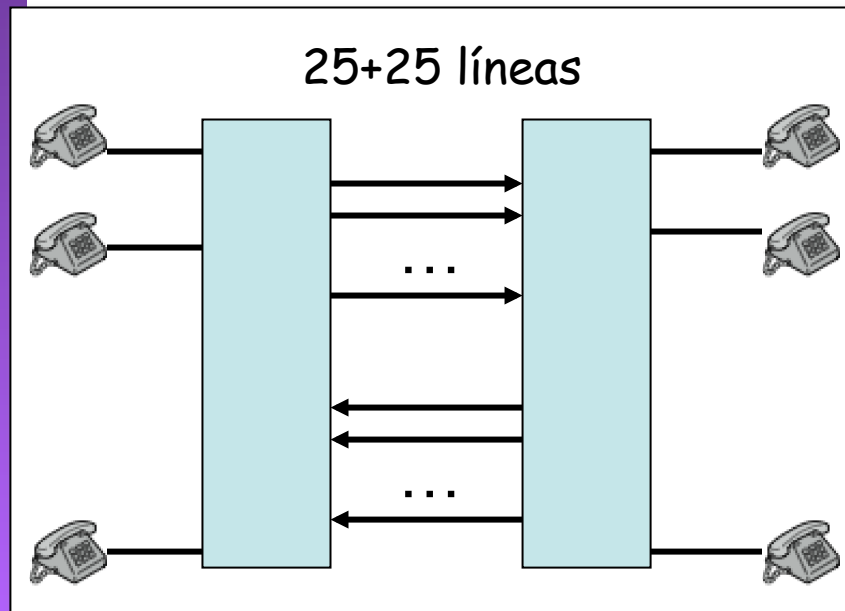
$$P_b(B \rightarrow A) = B(I, 25)$$

$$B(15, 25) = 0.005 \quad 0.5\%$$

- Probabilidad de bloqueo en el caso 2:

$$P_b(\text{cualquier dirección}) = B(I + I, 50)$$

$$B(30, 50) = 0.0002 \quad 0.02\% \quad 20 \text{ veces menos !!!}$$



# Tráfico cursado

- Si un conjunto  $k$  de líneas tiene un tráfico ofrecido de  $I$  Erlangs y una probabilidad de bloqueo, ¿cuánto tráfico atraviesa las líneas?

Esto será el **tráfico cursado** y será a su vez el tráfico ofrecido al siguiente sistema al que lleguen las líneas

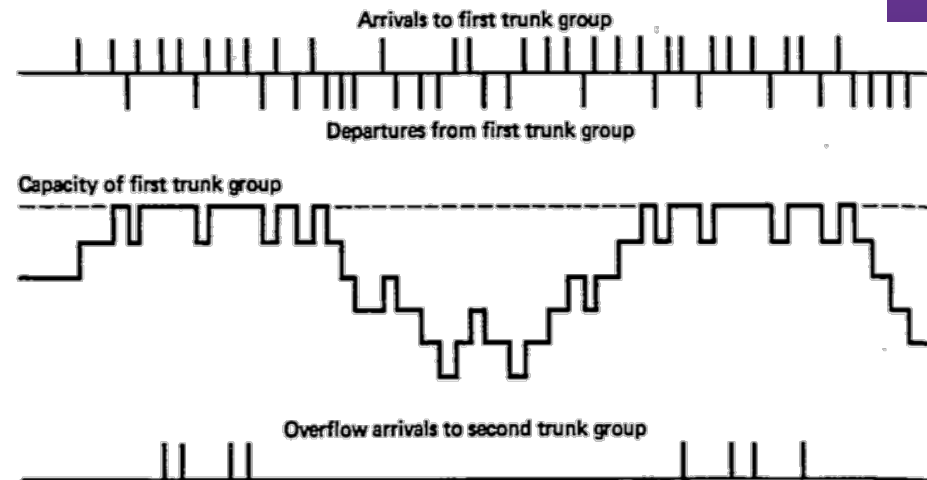
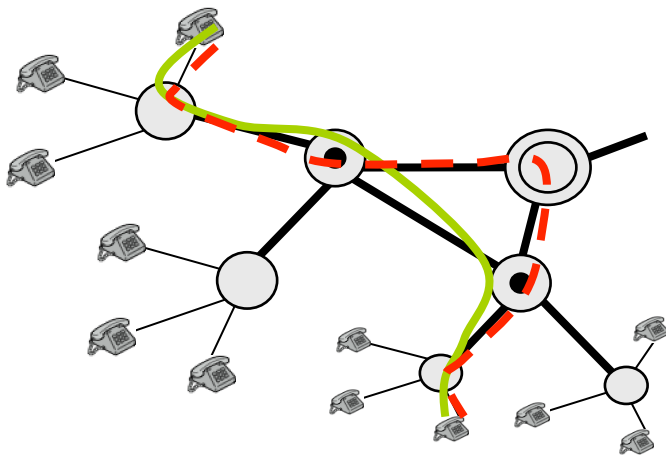
$$I_c = I_{in} (1 - P_b) = I_{in} (1 - B(I_{in}, k))$$

$I_c$  : tráfico cursado

$I_{in}$  : tráfico ofrecido o de entrada

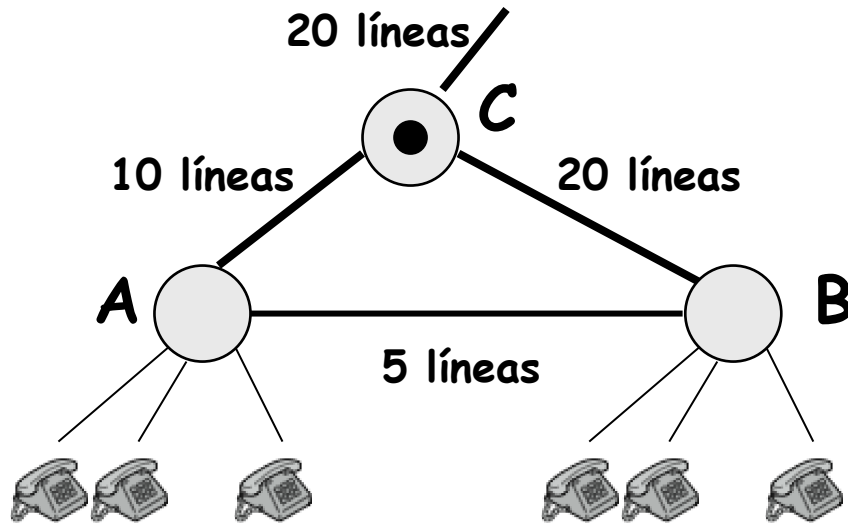
# Tráfico de desbordamiento

- No puede ser cursado por el camino principal (por bloqueo)
- Se “desborda” (overflow) a una ruta secundaria
- Un proceso de Poisson del que se eliminan aleatoriamente (iid) muestras con probabilidad  $p$  sigue siendo un proceso de Poisson, pero con menor tasa ( $p\lambda$ )
- En nuestro caso las llamadas desbordadas suelen ir en bloques
- Eso da mayores probabilidades de bloqueo que con un proceso de Poisson de igual media
- Se aproxima con un proceso de Poisson de mayor tasa
- (En los problemas en caso de no disponer de las tablas emplearemos Poisson de igual tasa, aunque esto es subdimensionar)



# Ejemplo

- En la centralita A de la figura las llamadas con destino a B se encaminan si es posible por el enlace directo a B y en caso de estar ocupado a través de la central primaria
- ¿Cuál es el tráfico que cursa el enlace A-C y cuál es la probabilidad de bloqueo de una llamada de un abonado de A a uno de B ?

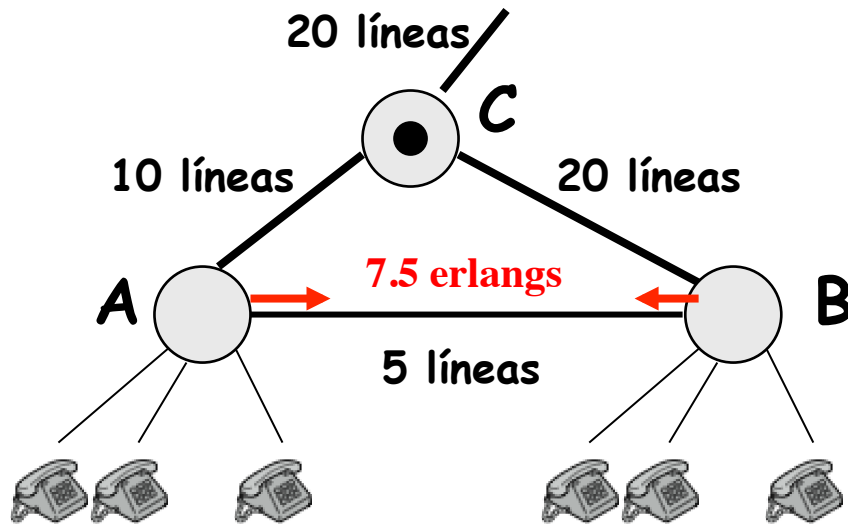


## Demanda en Erlangs

Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-

# Ejemplo

- Las 5 líneas entre A-B soportan un tráfico de  $3+4.5=7.5$  Erlangs
- Al ser 5 líneas la probabilidad de bloqueo es  $p_1 = B(7.5,5) \approx 0.45$ 
  - Casi la mitad de las llamadas no puede ir por la sección directa
  - Eso genera que un 45% del trafico que iba por ahí acabe yendo por C
  - Definimos:  $q_1 = 1-p_1 = 0.55$



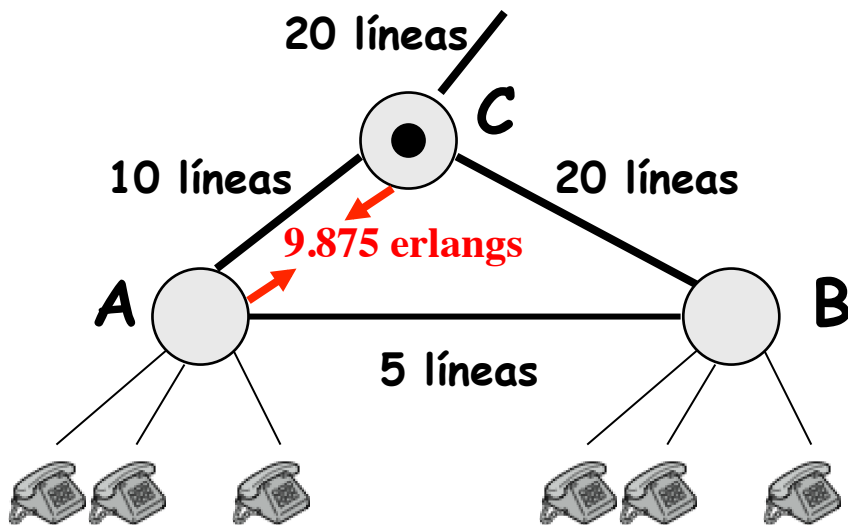
## Demanda en Erlangs

Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-



# Ejemplo

- El enlace entre A-C soporta un tráfico de:
  - Llamadas entre A y el exterior:  $4.5 + 2 = 6.5$  Erlangs
  - Llamadas entre A y B que no pueden ir directamente:  $7.5 \times 0.45 = 3.375$  E
  - Total 9.875 Erlangs (aproximamos que es Poisson)
- 10 líneas con 9.875 Erlangs de demanda tienen una probabilidad de bloqueo de  $p_2 = B(9.875, 10) \approx 0.21$  (21%) ( $q_2 = 1 - p_2 = 0.79$ )
- El enlace A-C tiene una probabilidad de bloqueo en torno al 21%

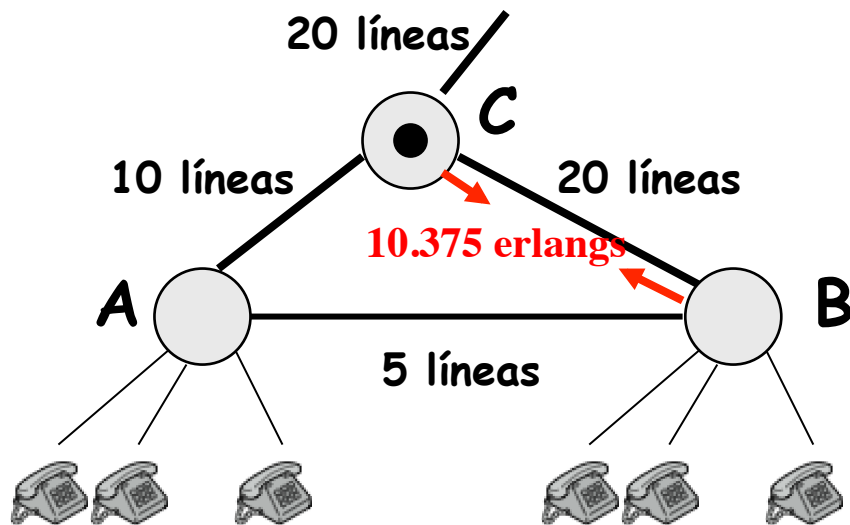


## Demanda en Erlangs

Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-

# Ejemplo

- El enlace B-C soporta un tráfico de:
  - Llamadas entre B y el exterior:  $5 + 2 = 7$  Erlangs
  - Llamadas entre A y B que no pueden ir directamente:  $7.5 \times 0.45 = 3.375$  E
  - Total 10.375 Erlangs (aproximamos que es Poisson)
- 20 líneas con 10.375 Erlangs de demanda tienen una probabilidad de bloqueo de  $p_3 = B(10.375, 20) \approx 0.0027$  (0.27%)
- Prácticamente despreciable ( $q_3 = 1 - p_3 \approx 1$  comparado con el resto)



## Demanda en Erlangs

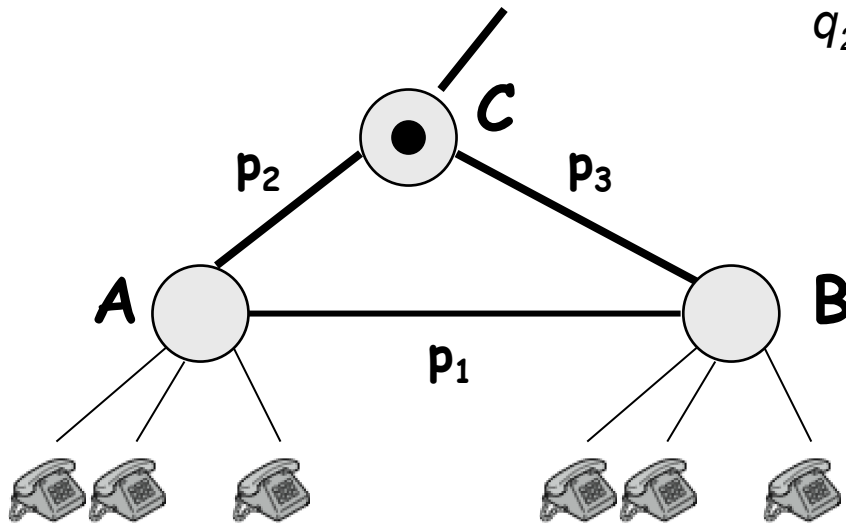
Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-

# Ejemplo

- Probabilidades de bloqueo en cada enlace:  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$
- Asumimos independencia
- Probabilidad de bloqueo de llamadas entre A y B: que ambos caminos se bloqueen (A-B y A-C-B)
- Probabilidad de que se bloquee el camino A-C-B = probabilidad de que se bloquee al menos uno de los dos (A-C y/o A-C-B) =  $1 - \text{probabilidad de que ninguno de los dos se bloquee}$

$$P_{\text{bloq}}_{A-B} = p_1(1 - (1 - p_2)(1 - p_3)) = p_1(1 - q_2q_3) \approx p_1p_2$$

$$q_2 = 1 - p_2, \quad q_3 = 1 - p_3 \approx 1$$

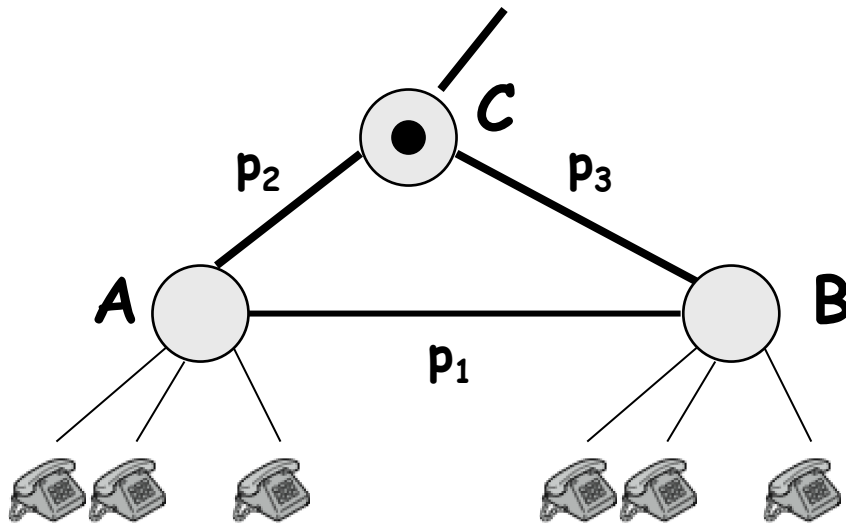


## Demanda en Erlangs

Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-

# Ejemplo

- Tráfico cursado por el enlace A-C:
  - Ofrecido a A-C-B (el desbordado de A-B) que es cursado:  $3.375 \times q_2 q_3$
  - + tráfico de A con el exterior que es cursado:  $6.5 \times q_2$
  - =  $3.375 \times (1-0.21)(1-0.0027) + 6.5 \times (1-0.21) = 7.794$  Erlangs



Demanda en Erlangs

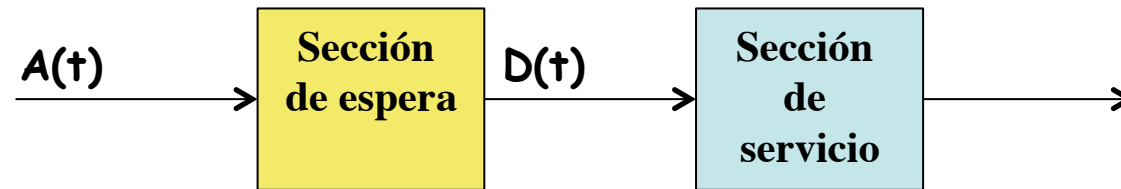
Origen	a A	a B	Al exterior
De A	2	4.5	4.5
De B	3	3.2	5
Exterior	2	2	-

# Un poco de teoría de colas: Fórmula de Little

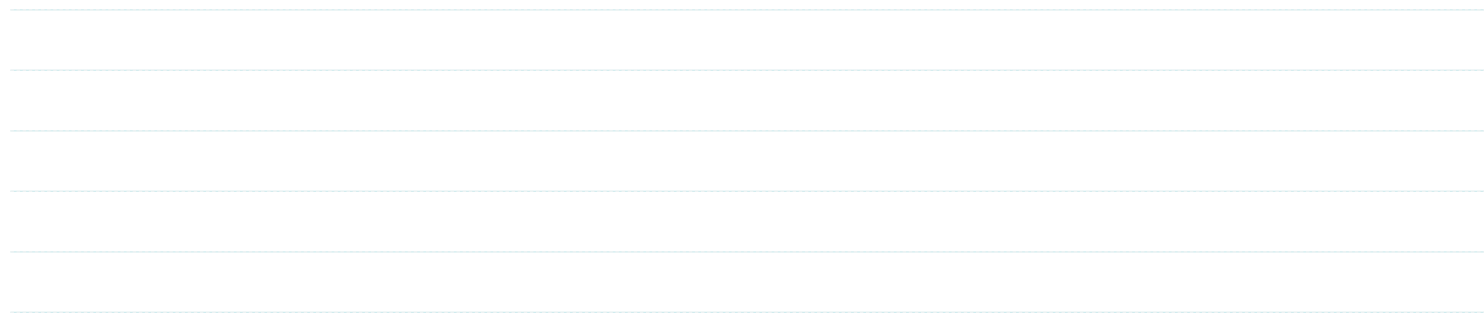
John D.C. Little (MIT)

# Sistema con cola

- Un sistema con una sección de servicio y una cola de espera
- $A(t)$  : número de llegadas acumuladas en función del tiempo
- $D(t)$  : número de salidas de la cola acumuladas en función del tiempo
- (...)



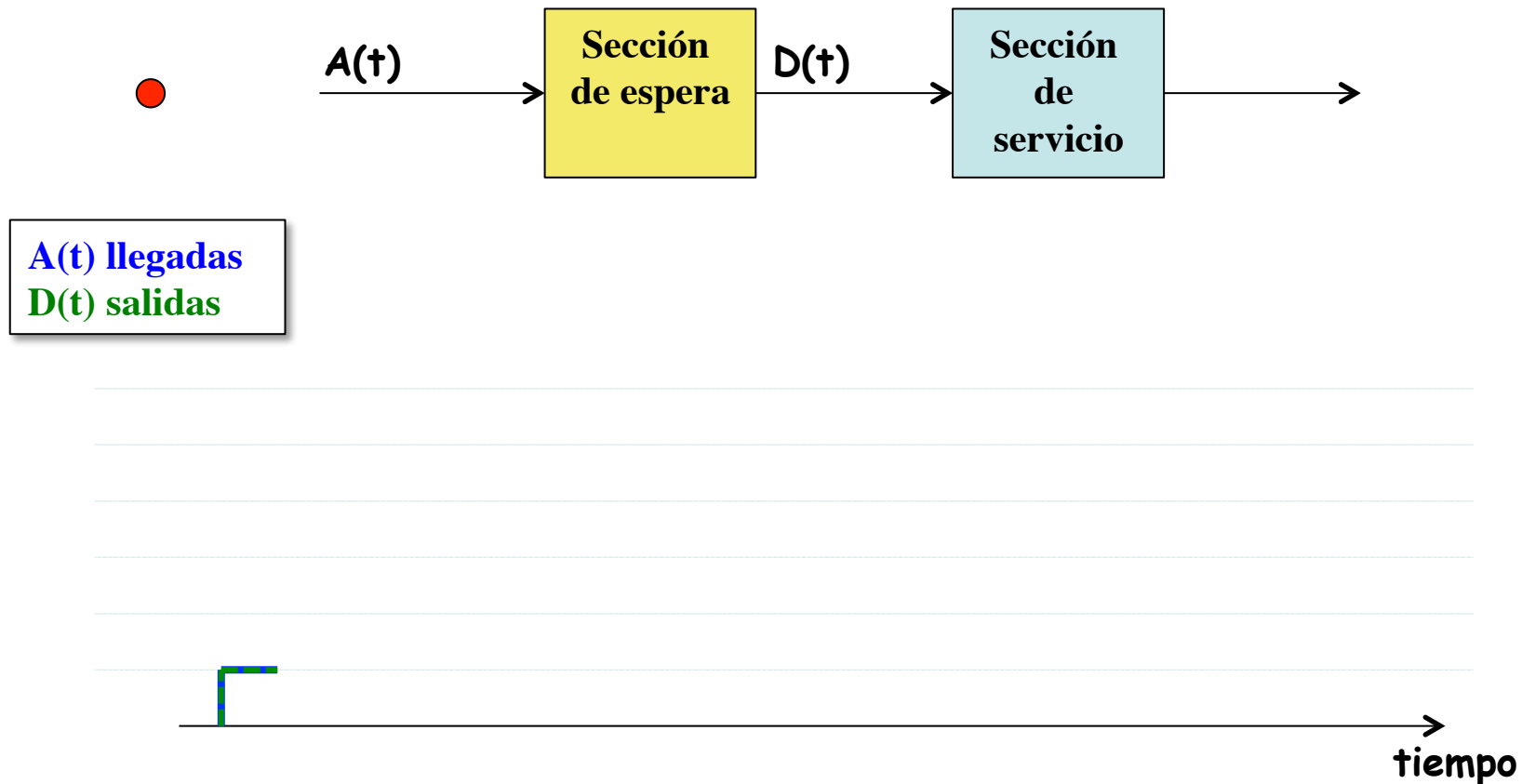
$A(t)$  llegadas  
 $D(t)$  salidas



tiempo

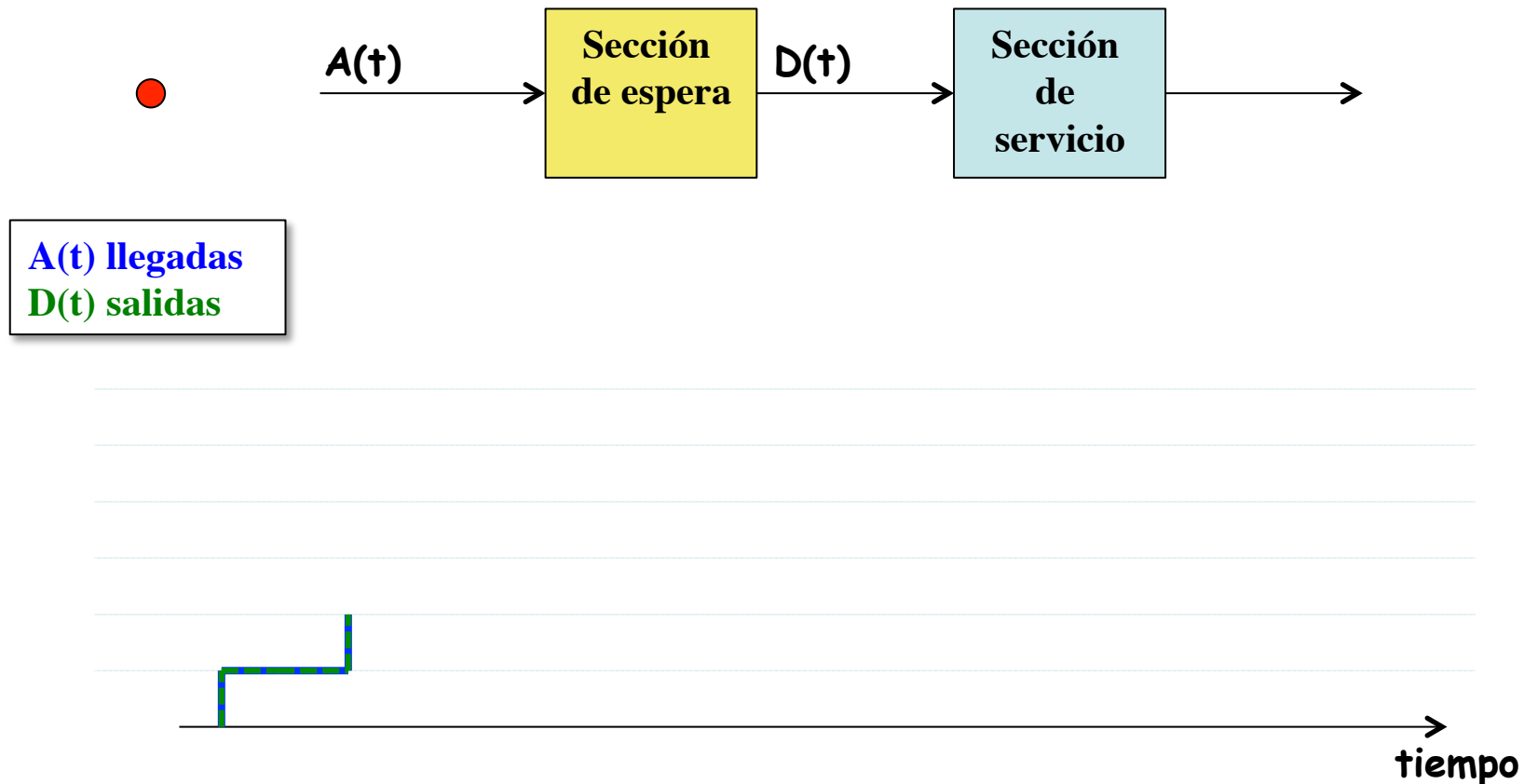
# Sistema con cola

- Una llegada:
  - Si la sección de servicio y la de espera están vacías pasa directamente a la sección de servicio (. . .)



# Sistema con cola

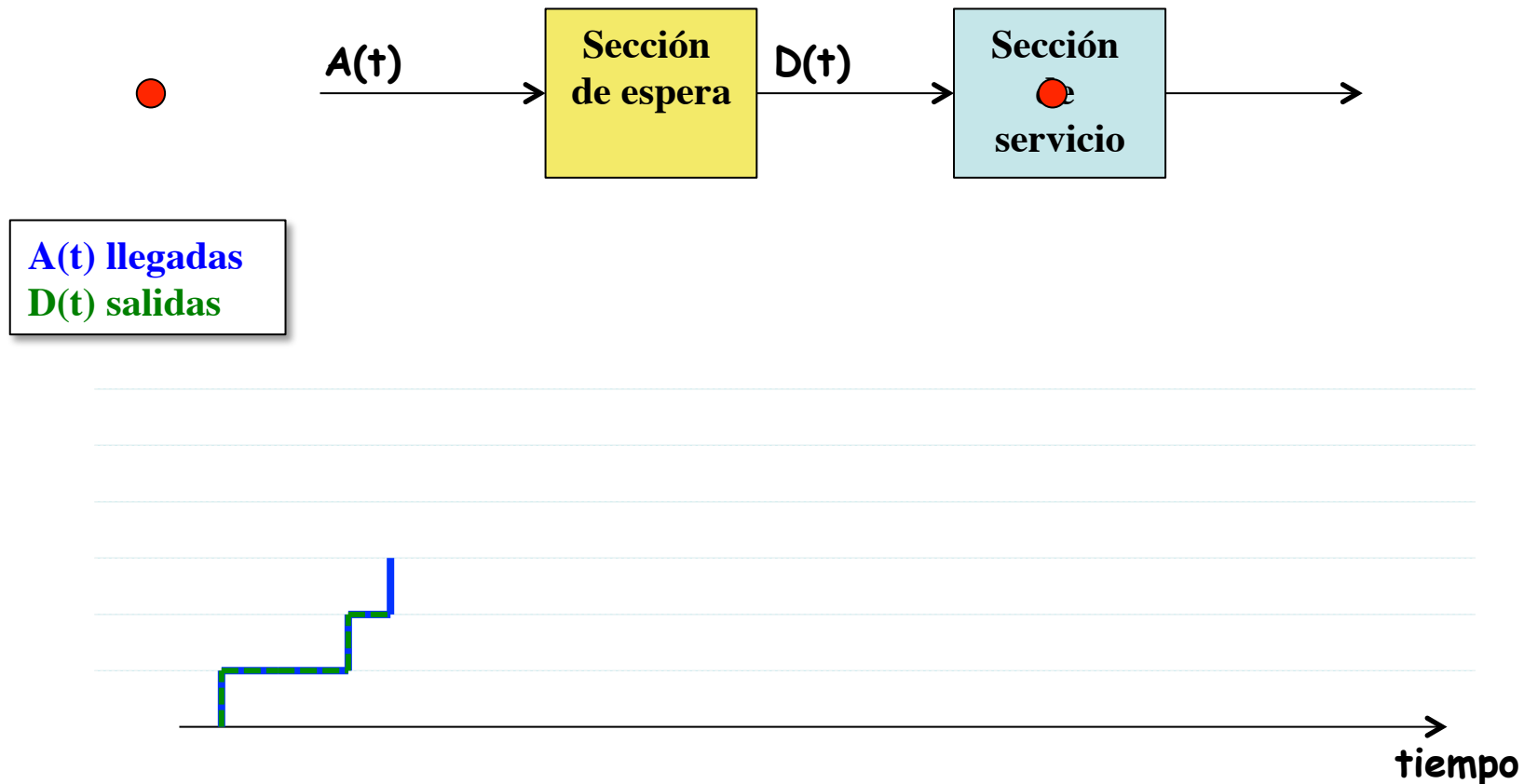
- Una llegada:
  - Si la sección de servicio y la de espera están vacías pasa directamente a la sección de servicio (. . .)
  - Si la sección de servicio está llena se queda en la de espera (. . .)





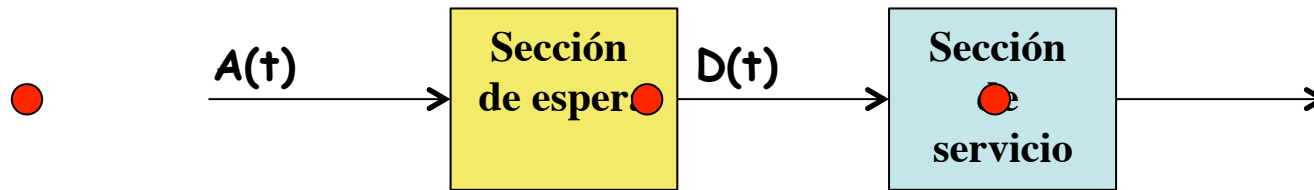
# Sistema con cola

- Una llegada:
  - Si la sección de servicio y la de espera están vacías pasa directamente a la sección de servicio (. . .)
  - Si la sección de servicio está llena se queda en la de espera (. . .)

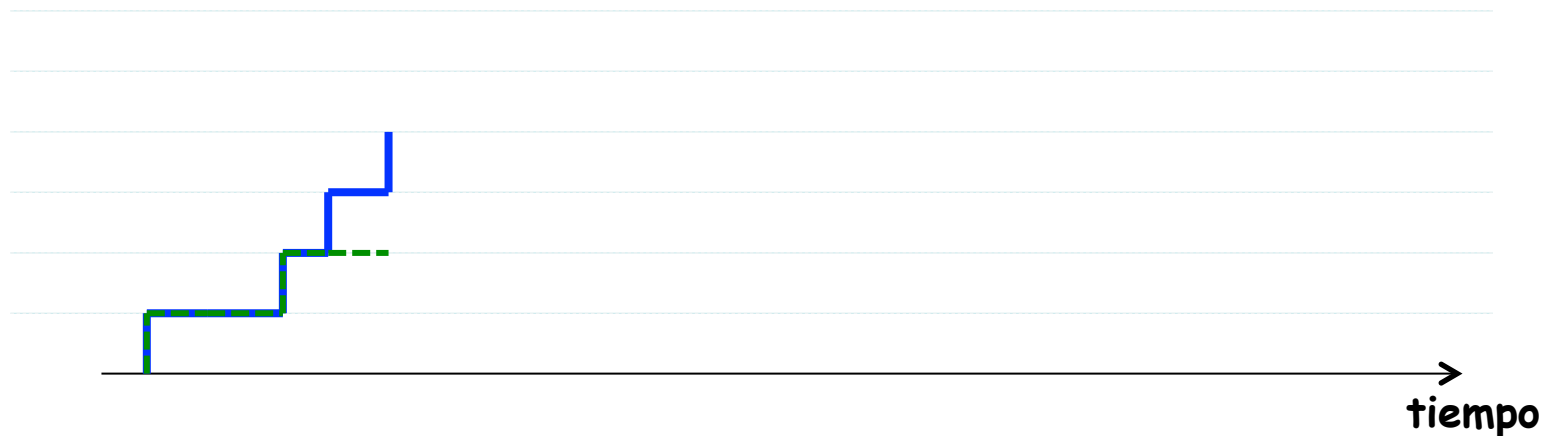


# Sistema con cola

- Una llegada:
  - Si la sección de servicio y la de espera están vacías pasa directamente a la sección de servicio (. . .)
  - Si la sección de servicio está llena se queda en la de espera (. . .)

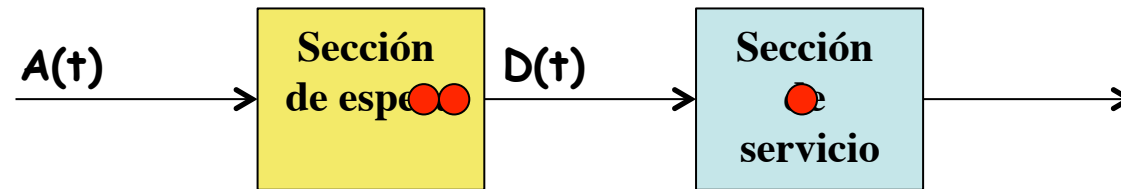


**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**

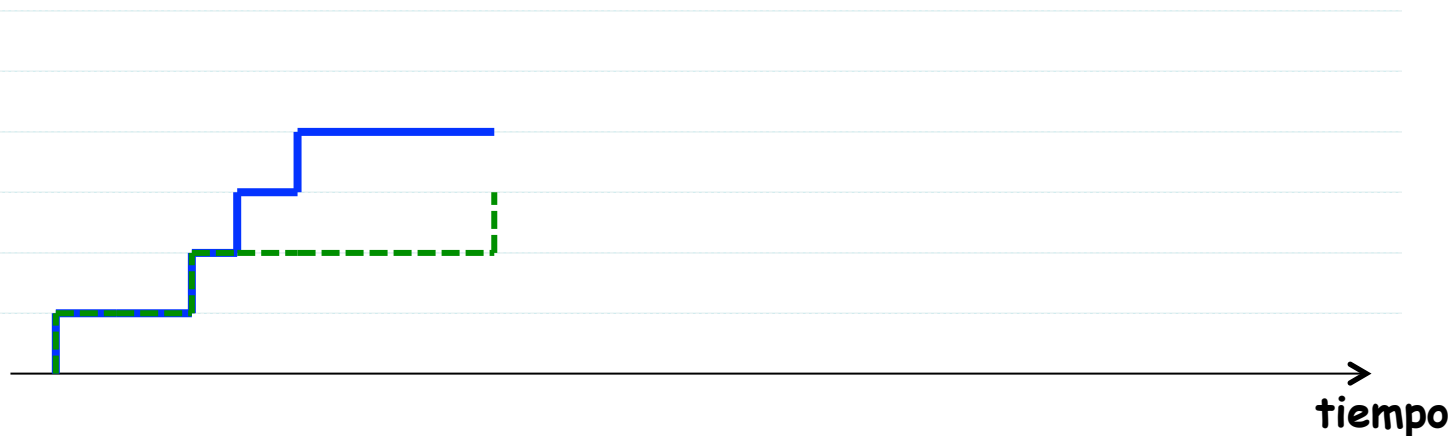


# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)

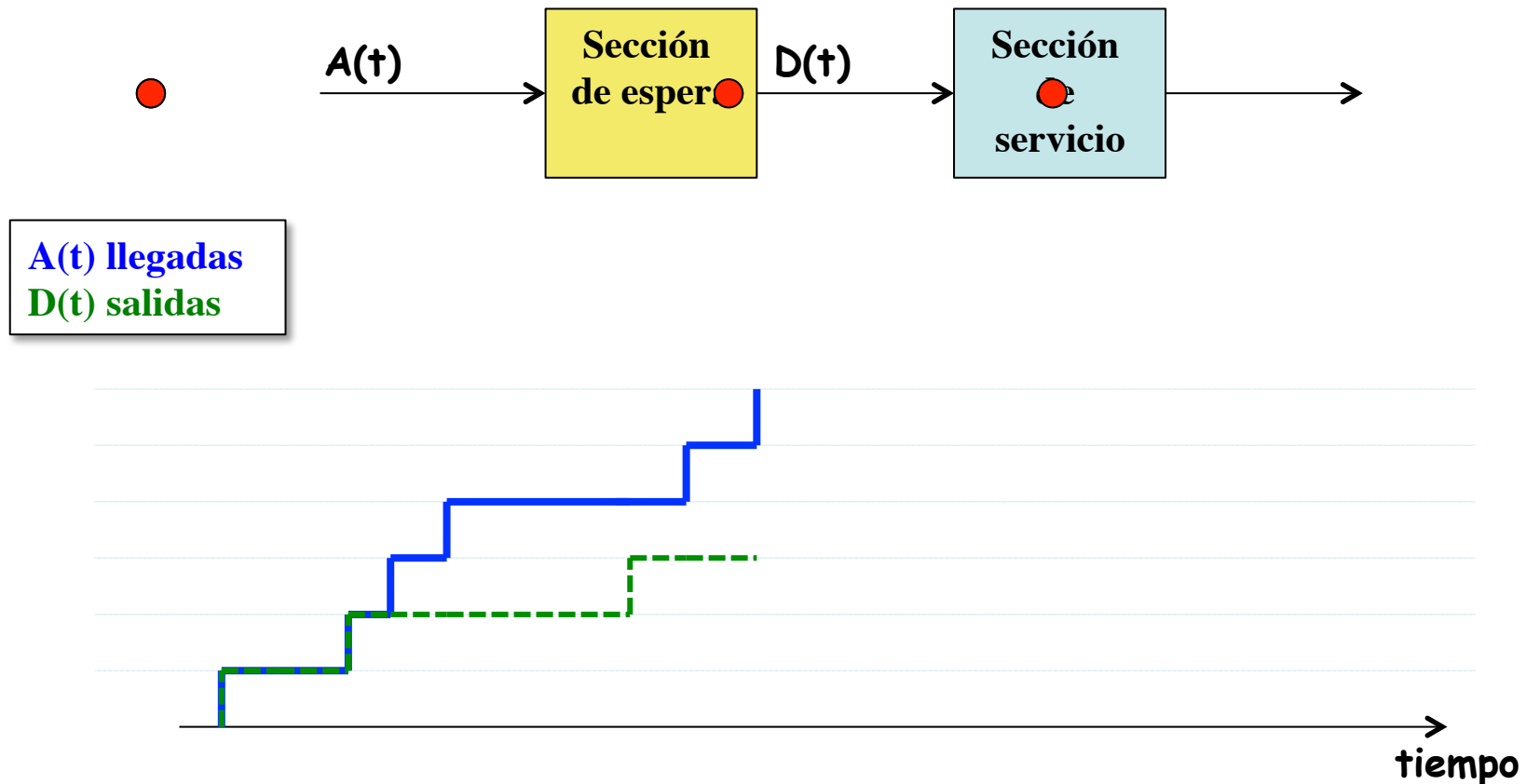


$A(t)$  llegadas  
 $D(t)$  salidas



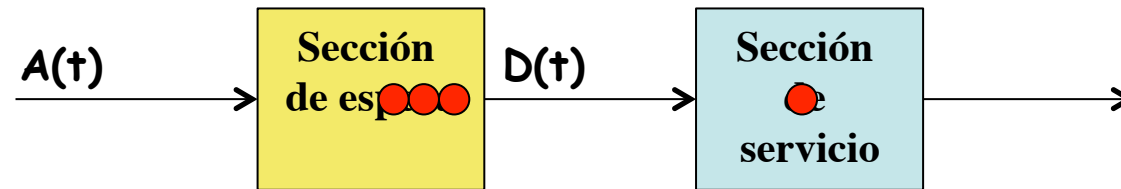
# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)

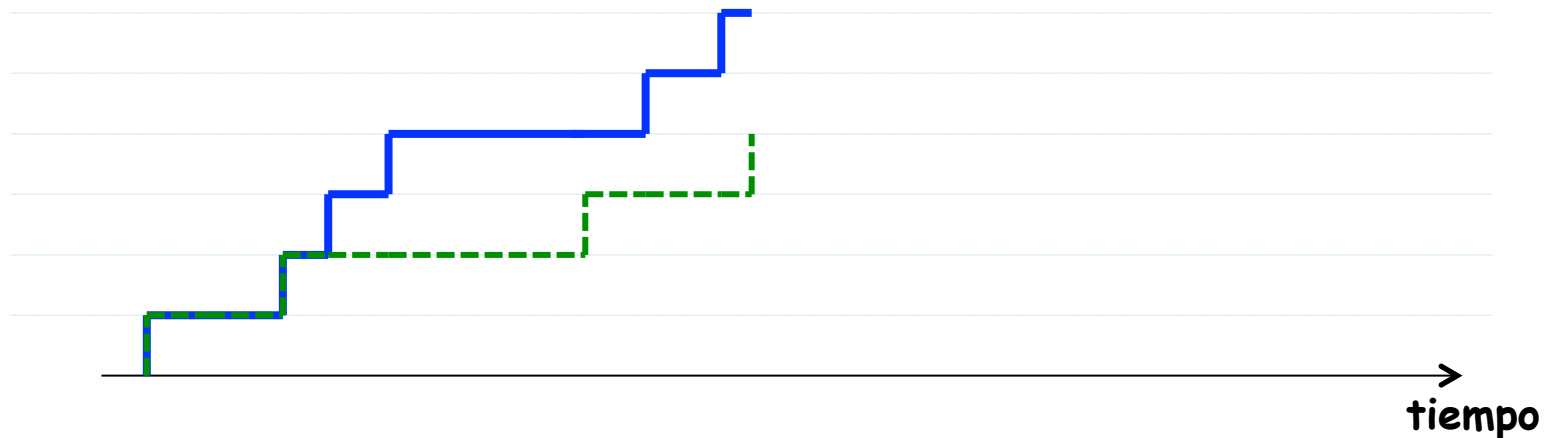


# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)

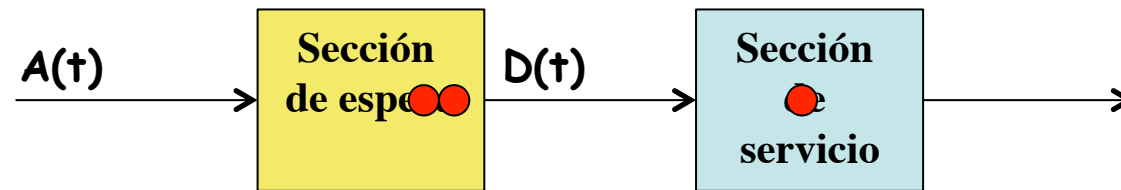


$A(t)$  llegadas  
 $D(t)$  salidas

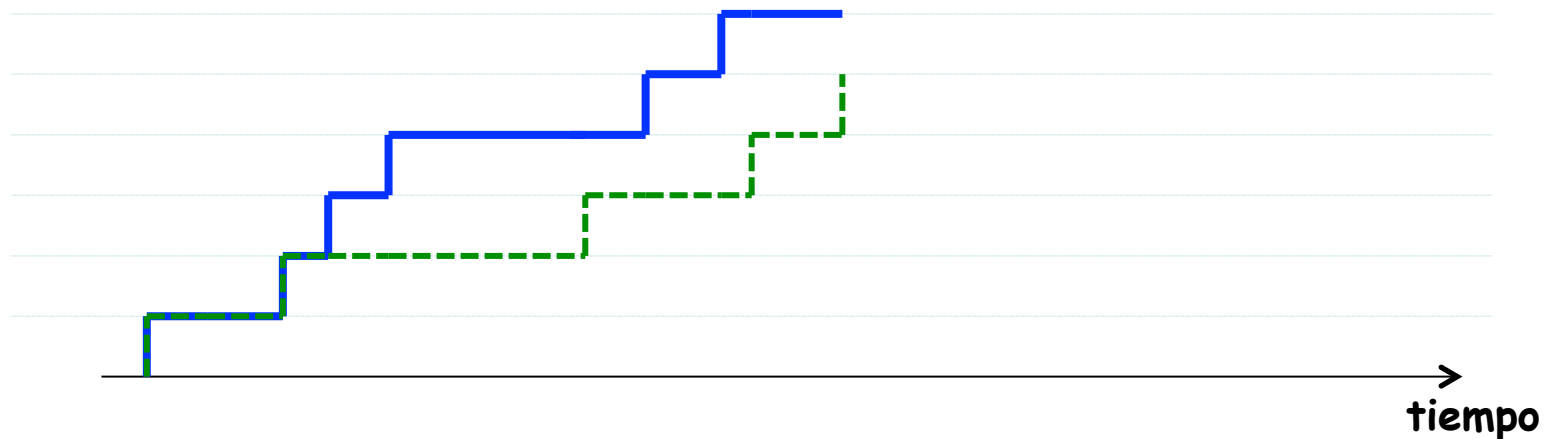


# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)

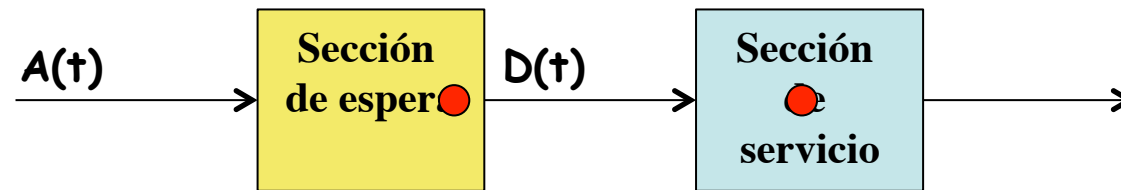


$A(t)$  llegadas  
 $D(t)$  salidas

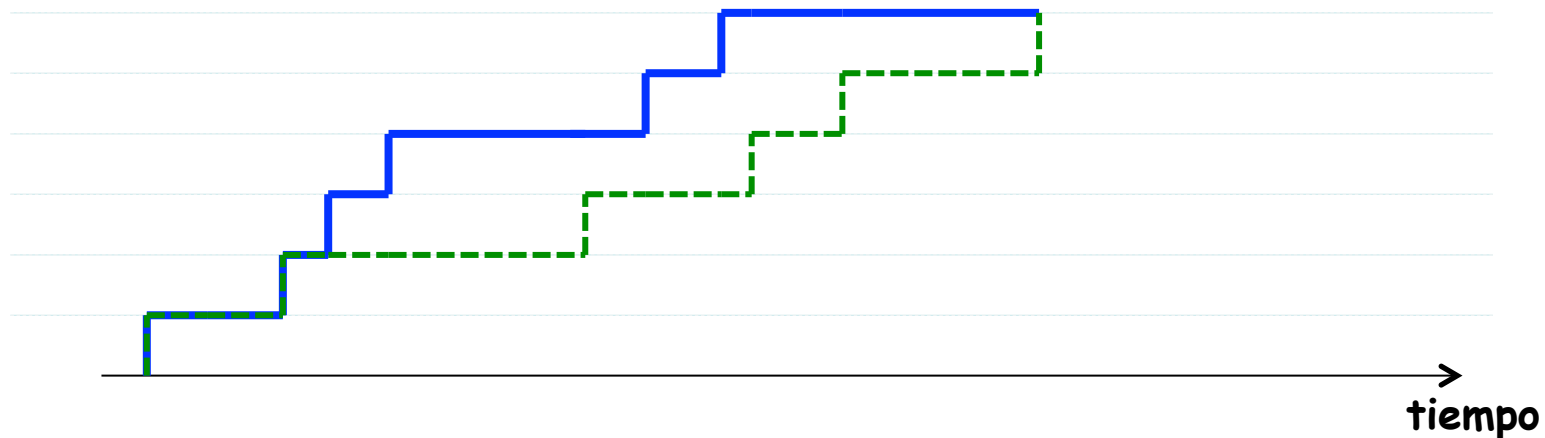


# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)

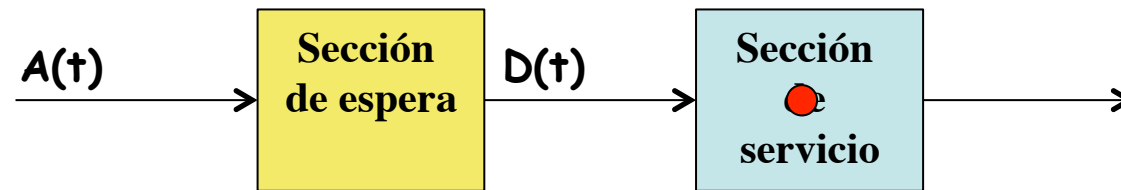


**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**

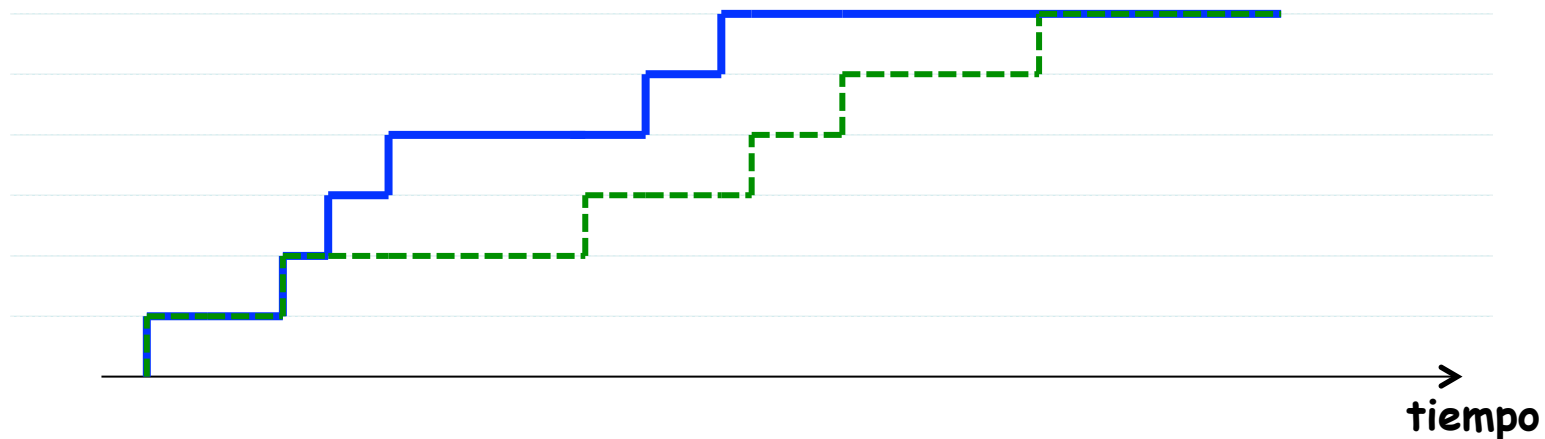


# Sistema con cola

- A medida que los clientes terminan en la sección de servicio otros nuevos de la de espera pasan inmediatamente a ella (. . .)



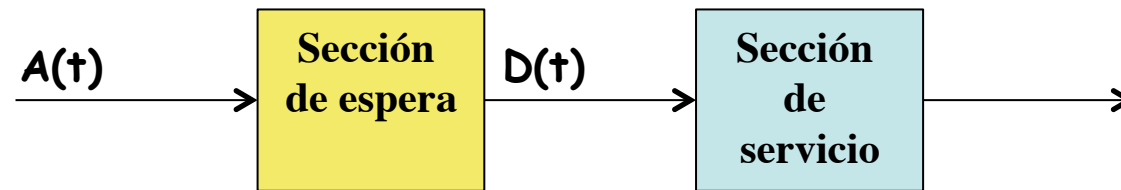
**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**



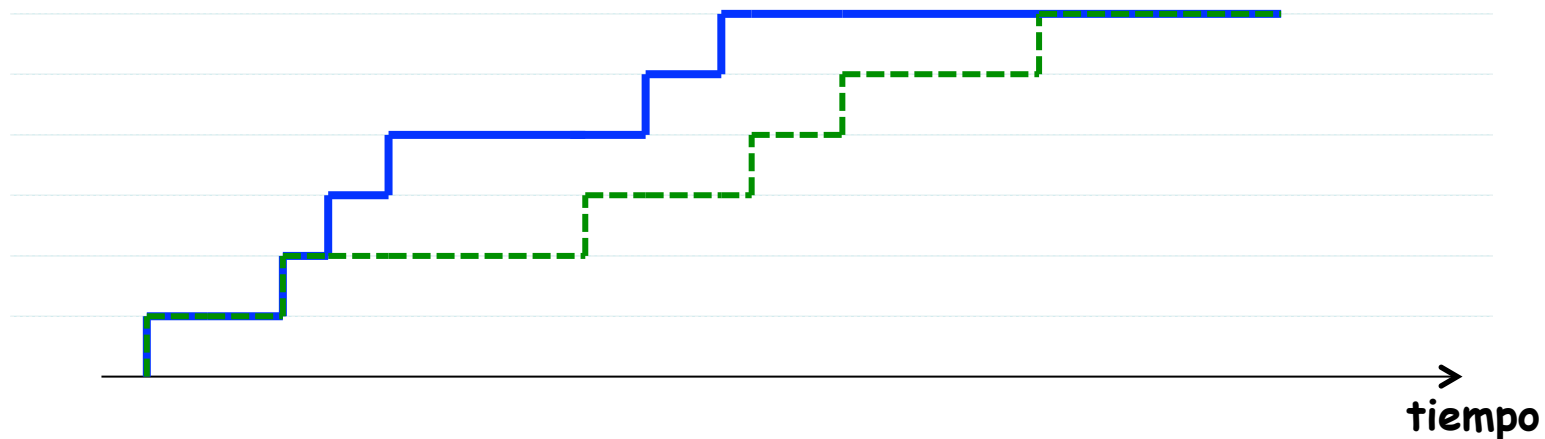


# Sistema con cola

- Asumimos que es conservativo: todos los clientes que llegan son atendidos
- $L(t) = A(t) - D(t)$  : número de usuarios en espera en el instante  $t$

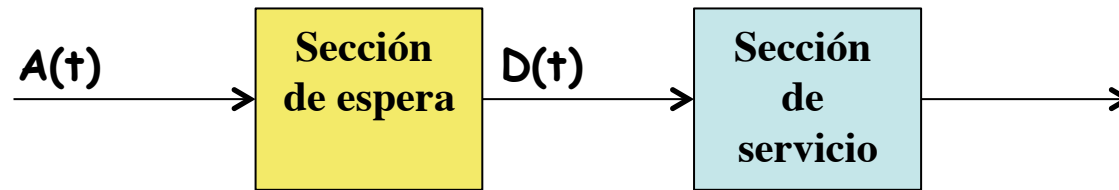


**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**

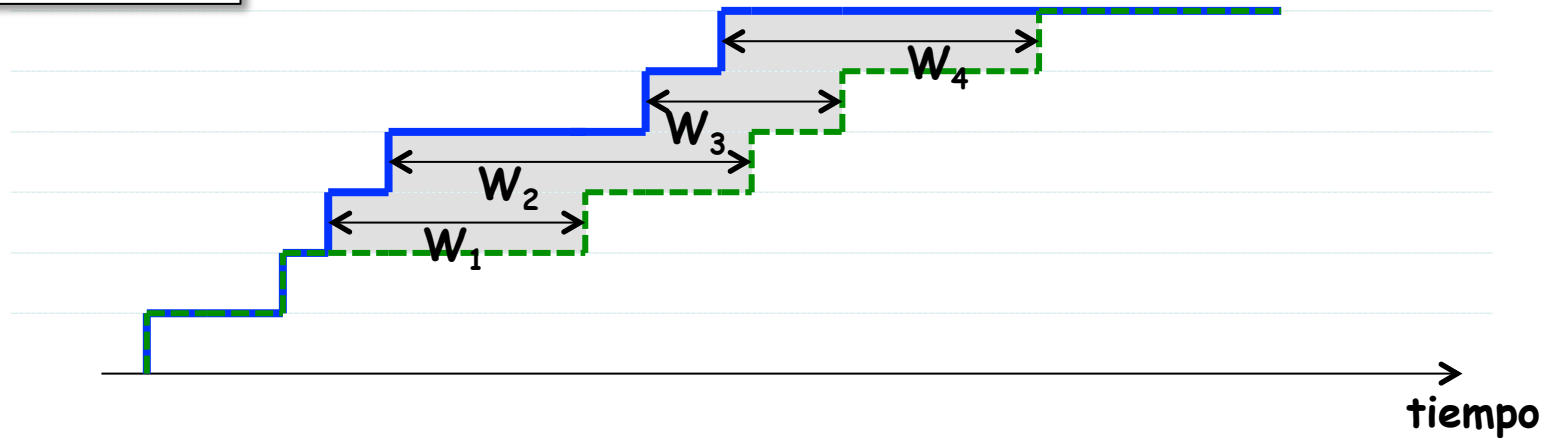


# Sistema con cola

- $W_i$  son tiempos durante los cuales algún cliente estuvo esperando

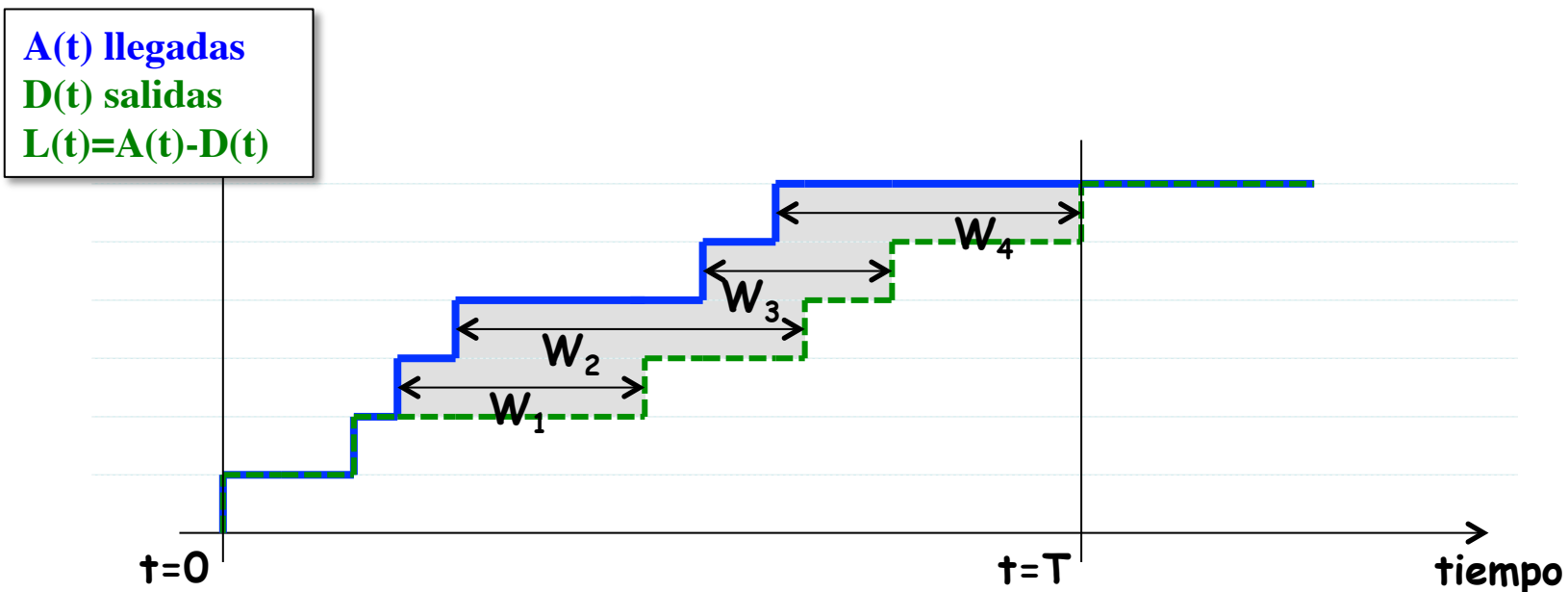
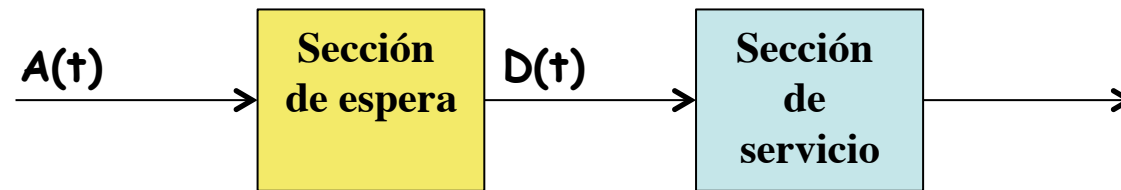


**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
 **$L(t) = A(t) - D(t)$**



# Sistema con cola

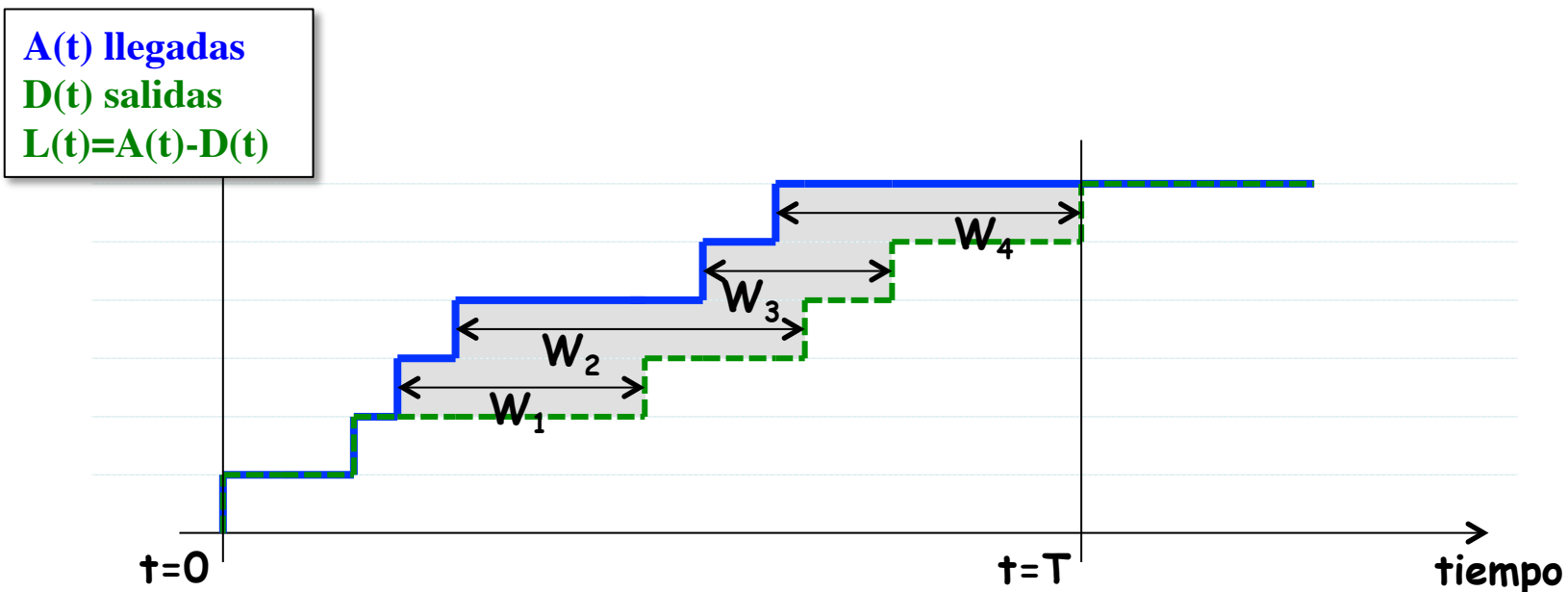
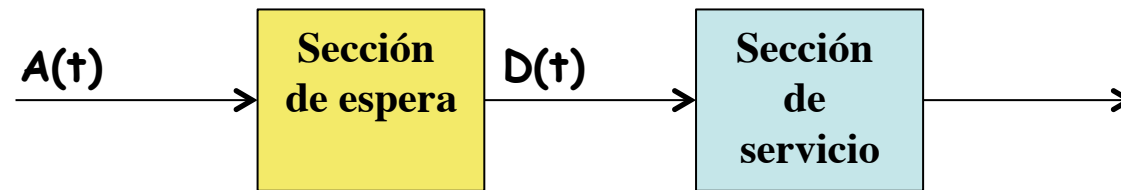
- $W_i$  son tiempos durante los cuales algún cliente estuvo esperando
- Consideramos dos instantes en los que  $A(t)=D(t)$
- Por ejemplo  $t=0$  y  $t=T$



# Sistema con cola

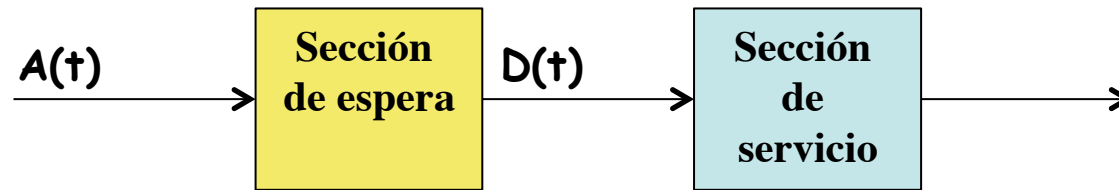
- El número de llegadas en ese intervalo es:  $n(T) = A(T) - A(0)$
- El número *medio* de llegadas por unidad de tiempo en él es:

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T}$$

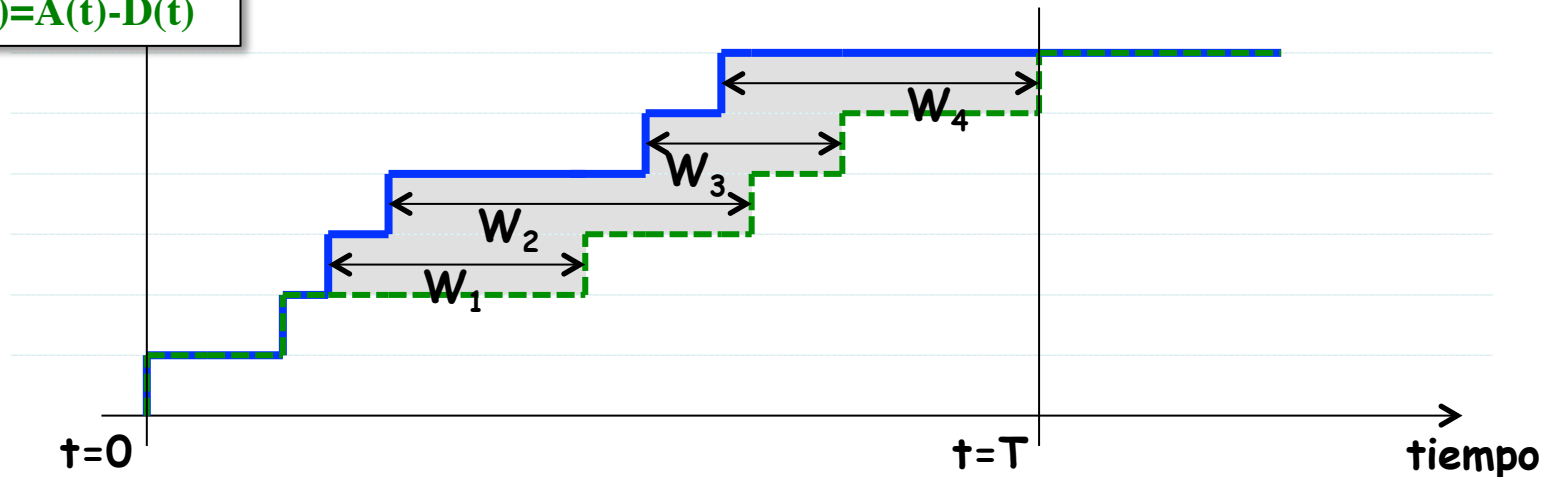


# Sistema con cola

- El área sombreada es:  $\int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j$
- El tiempo medio de espera en ese intervalo es:  $\bar{W}(T) = \sum_{j=1}^{n(T)} \frac{W_j}{n(T)} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$
- Y el número medio de usuarios en él es:  $\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T}$



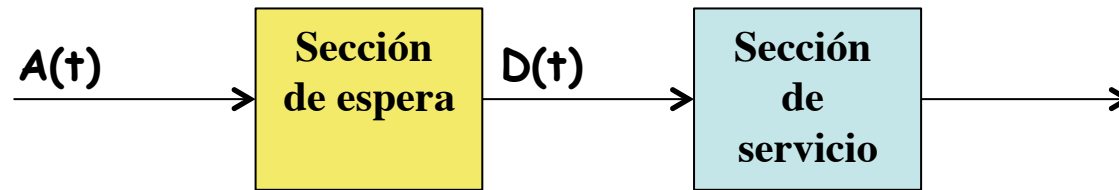
**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**



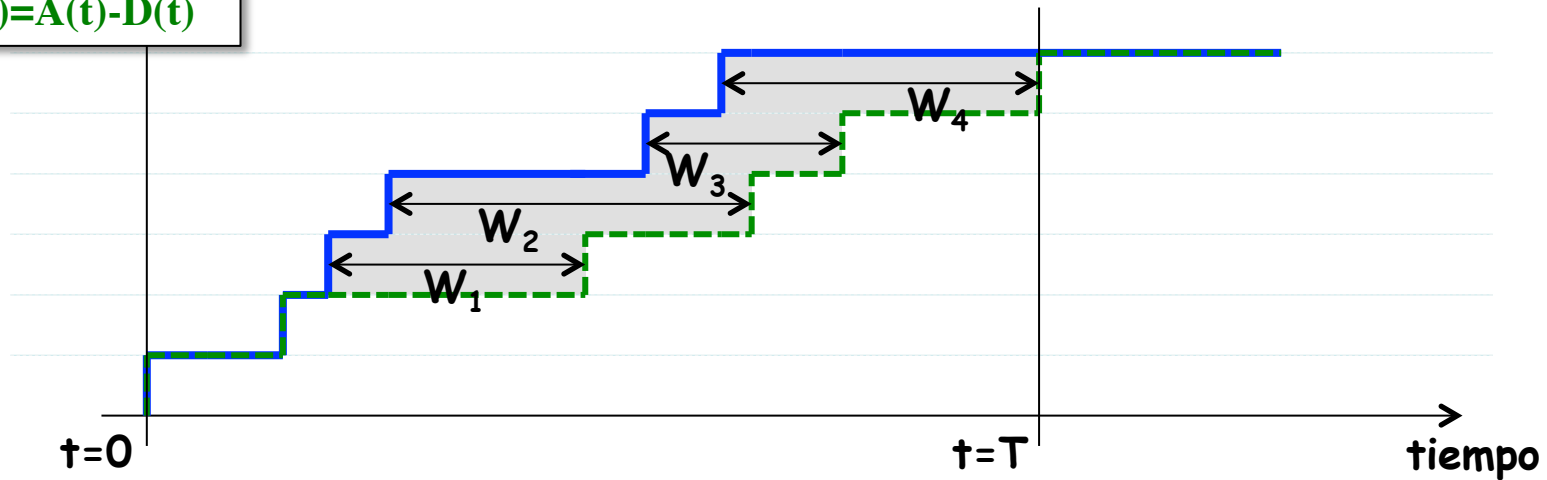
# Sistema con cola

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T} \quad \int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j \quad \bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} \quad \bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$

$$\bar{L}(T) =$$



**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**



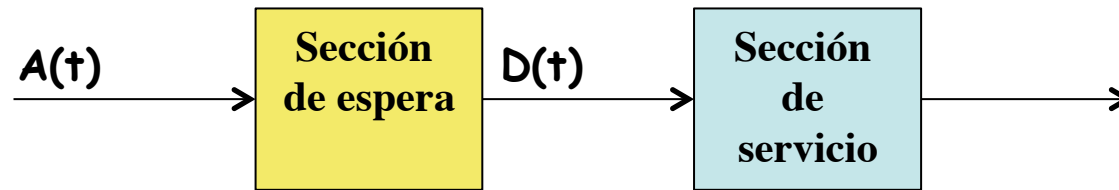
# Sistema con cola

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T}$$

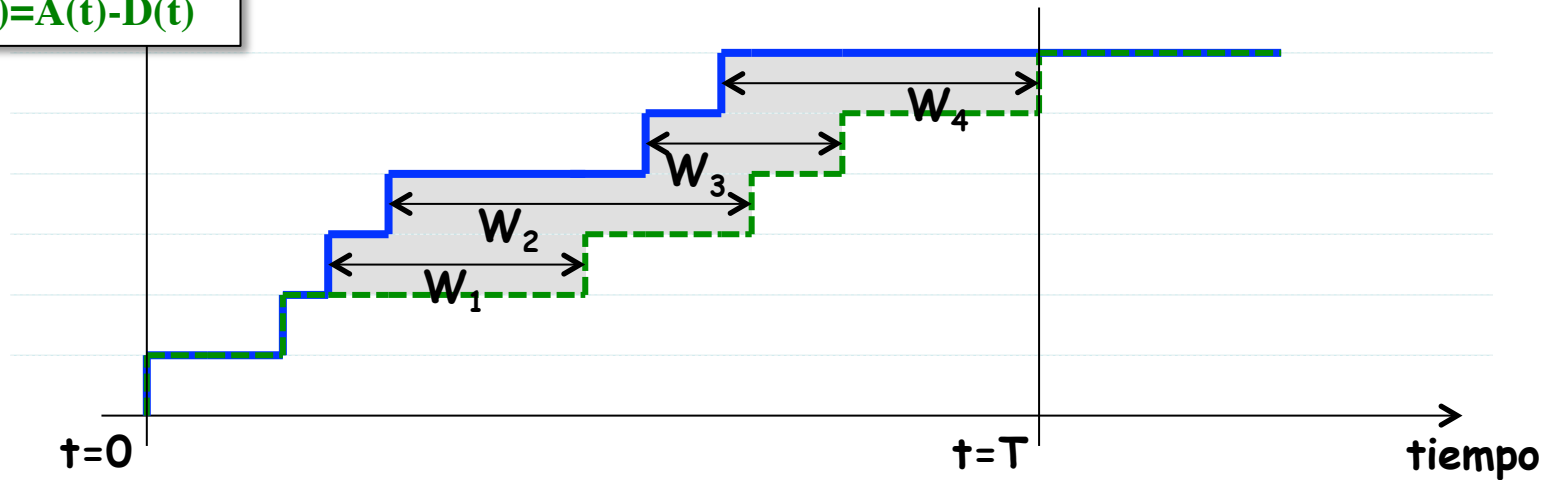
$$\int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j$$

$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T}$$

$$\bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$



**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**



# Sistema con cola

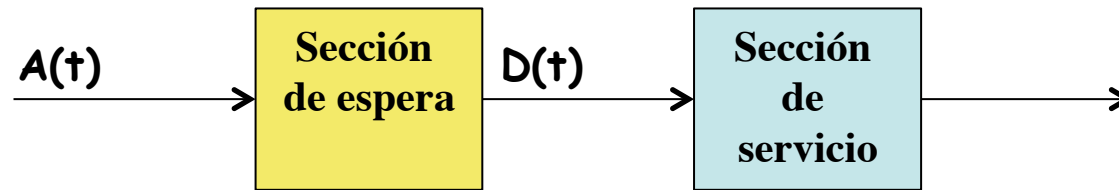
$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T}$$

$$\int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j$$

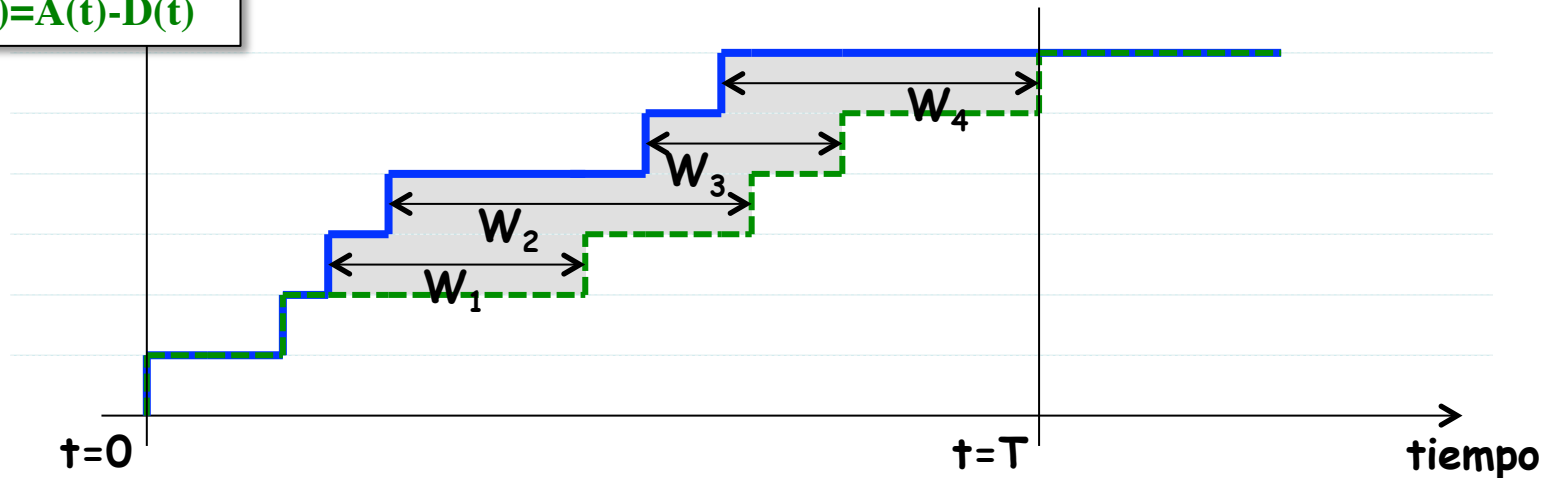
$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{T}$$

$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T}$$

$$\bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$



**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**





# Sistema con cola

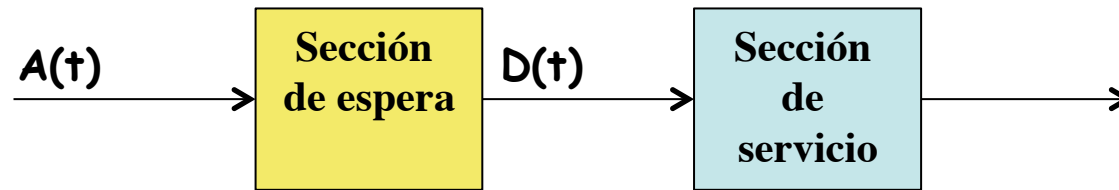
$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T}$$

$$\int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j$$

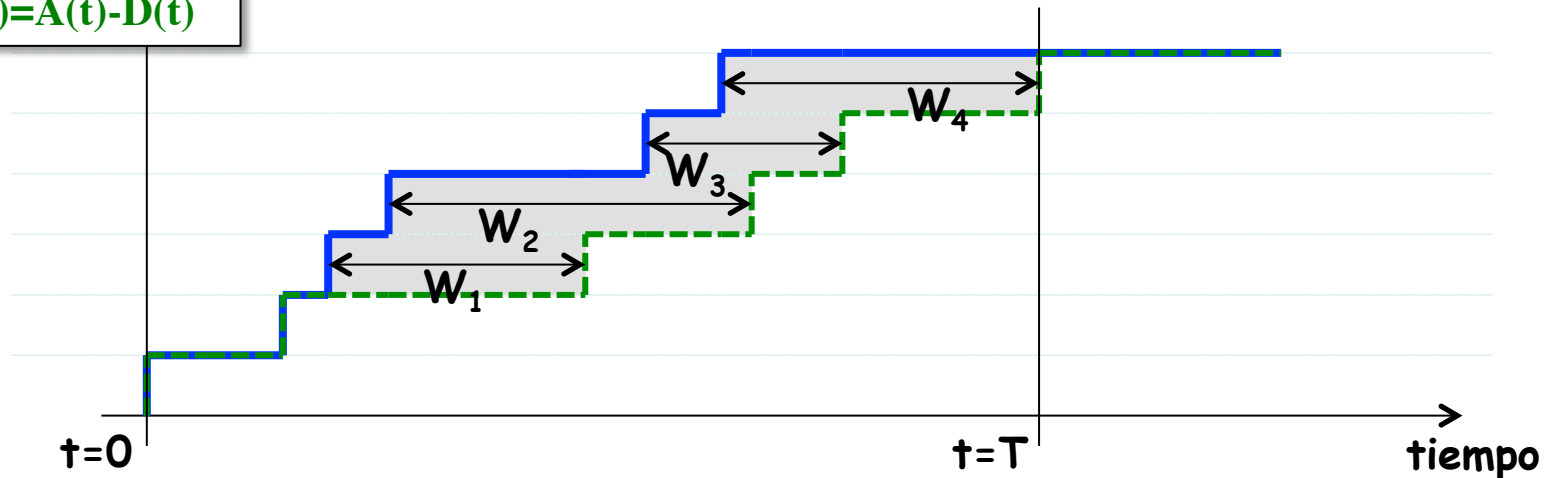
$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T}$$

$$\bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$

$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{T} = \frac{n(T)\bar{W}(T)}{T}$$



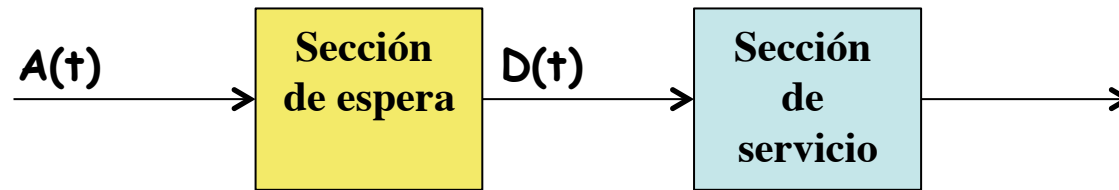
**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**



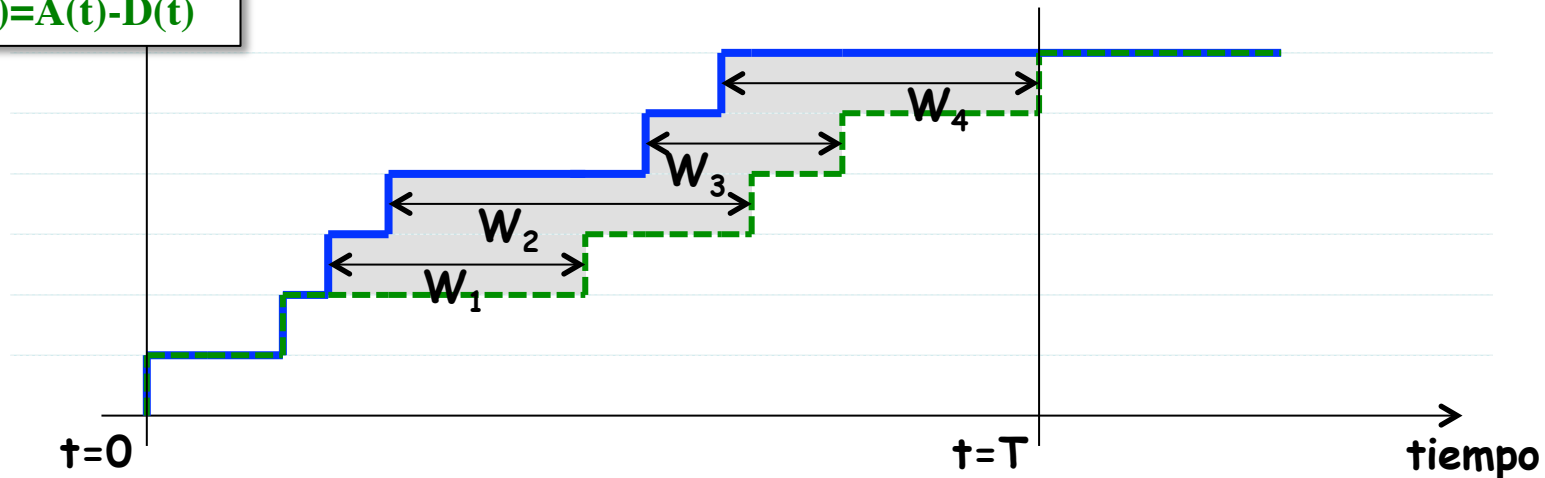
# Sistema con cola

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T} \quad \int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j \quad \bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} \quad \bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$

$$\bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{T} = \frac{n(T) \bar{W}(T)}{T} = \lambda(T) \bar{W}(T)$$



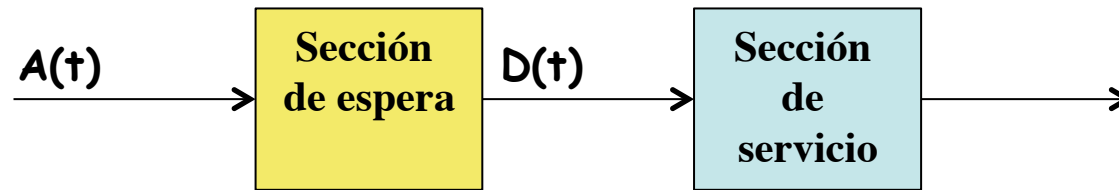
**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**



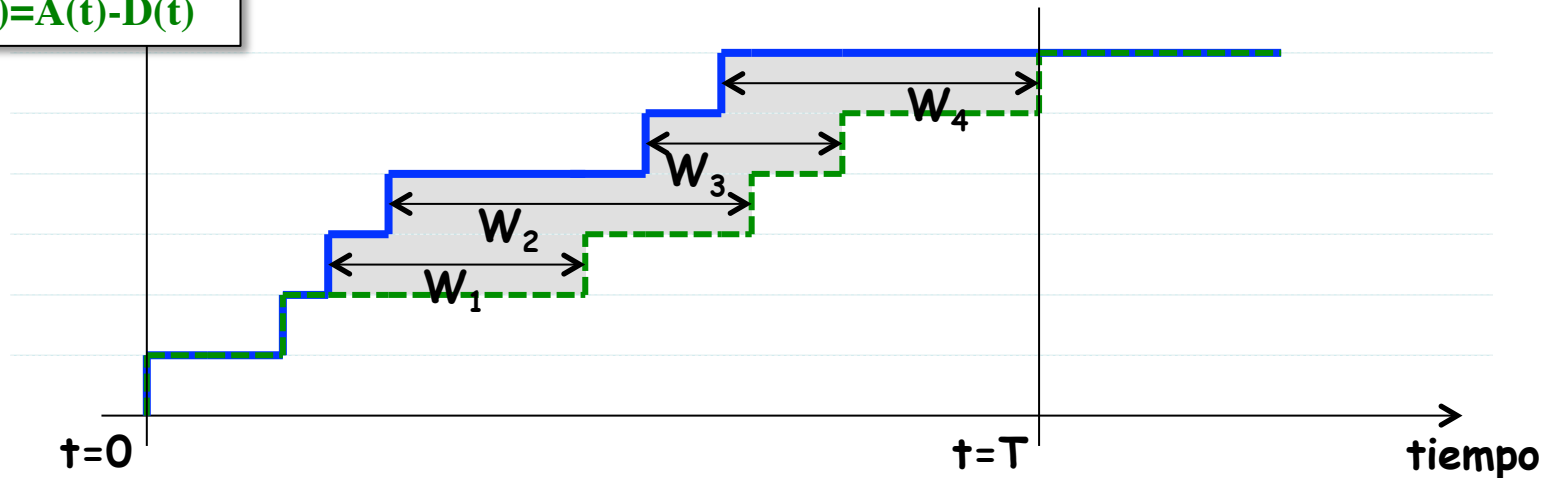
# Sistema con cola

$$\lambda(T) = \frac{n(T)}{T} \quad \int_0^T L(t) dt = \sum_{j=1}^{n(T)} W_j \quad \bar{L}(T) = \frac{\int_0^T L(t) dt}{T} \quad \bar{W}(T) = \frac{\sum_{j=1}^{n(T)} W_j}{n(T)}$$

$$\bar{L}(T) = \lambda(T) \bar{W}(T)$$



**A(t) llegadas**  
**D(t) salidas**  
**L(t)=A(t)-D(t)**

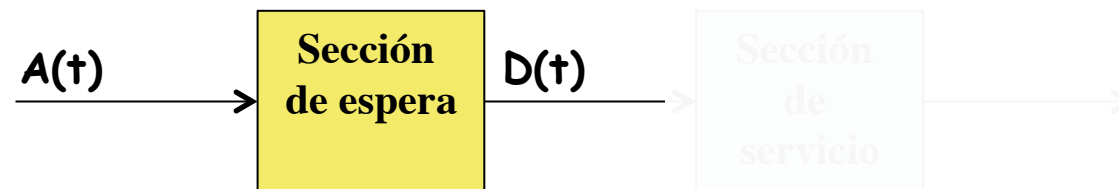


# Fórmula de Little

- Número medio de usuarios en el sistema = tasa media de llegadas x tiempo medio de espera

$$\bar{L}(T) = \lambda(T)\bar{W}(T)$$

- Demostrado para FIFO pero válido para cualquier política de servicio
- El “sistema” puede englobar cualquier número de elementos
- Podría ser por ejemplo solamente la sección de espera (...)



# Fórmula de Little

- Número medio de usuarios en el sistema = tasa media de llegadas x tiempo medio de espera

$$\bar{L}(T) = \lambda(T)\bar{W}(T)$$

- Demostrado para FIFO pero válido para cualquier política de servicio
- El “sistema” puede englobar cualquier número de elementos
- O ser solamente la sección de servicio



- Supongamos que la sección de servicio es una troncal de “infinitas” líneas y no hay cola (en vez de poder esperar se “bloquean”)
- La fórmula de Little nos dice que el número medio de líneas en uso (número medio de clientes en el sistema) es igual a la tasa media de llegadas multiplicada por el tiempo medio de servicio
- Es decir, la intensidad de tráfico media  $\bar{I} = \lambda s$

# Mayor complejidad

- *¿ Qué ocurre si las llamadas se retienen hasta que sean atendidas ?*

Teoría de colas (función C de Erlang)

- *¿ Qué ocurre si tenemos en cuenta que hay un número finito (y conocido) de usuarios ?*

Fórmula de Engset

# Preguntas pendientes

- *¿Y en el caso de conmutación de paquetes?*
  - Teoría de colas
  - Problemas más complicados
  - Peores aproximaciones
  - Mayor número de problemas sin resolver

# Resumen

- El tráfico telefónico se modela mediante procesos de llegadas de Poisson y duraciones exponenciales
- La probabilidad de bloqueo externo con tráfico telefónico se puede aproximar mediante la B de Erlang
- Erlang B sirve aunque los servicios no sean exponenciales siempre que sea i.i.d.
- Tráfico de desbordamiento no es de Poisson y suponerlo conlleva subdimensionamiento
- Fórmula de Little:  $L = \lambda W$
- Si no hay pérdidas el número medio de líneas en uso es la intensidad de tráfico media