upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ARQUITECTURA DE REDES, SISTEMAS Y SERVICIOS
Área de Ingeniería Telemática

Traffic Analysis

Area de Ingeniería Telemática
http://www.tlm.unavarra.es

Arquitectura de Redes, Sistemas y Servicios
3º Ingeniería de Telecomunicación

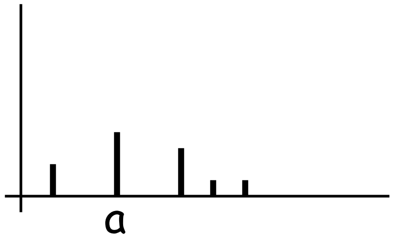
Modelando la carga

Variable aleatoria (V)

- No tiene un valor sino que describe el resultado de un experimento aleatorio
- Se caracteriza por la descripción de los posibles resultados que puede tomar en términos de probabilidad
- **Función de distribución / densidad de probabilidad**

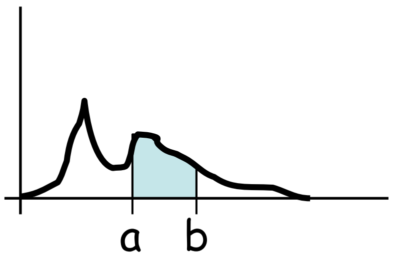
Variable discreta

$$p(a) = P[V = a]$$



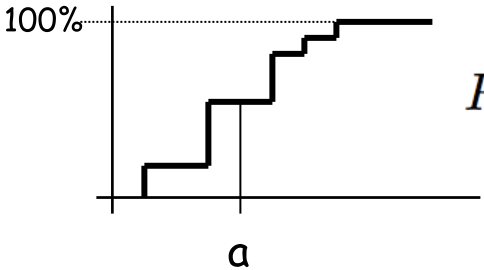
Variable continua

$$P[a < V < b] = \int_a^b p(t)dt$$



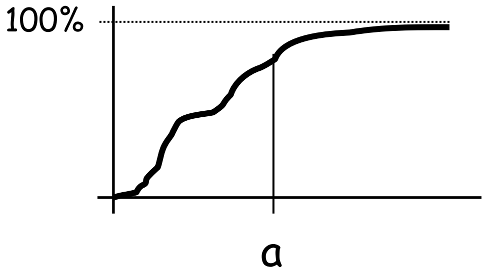
- **Función acumulada de probabilidad / distribución**

Variable discreta



$$P[V \leq a] = F(a)$$

Variable continua



Modelando la carga

Procesos estocásticos (V)

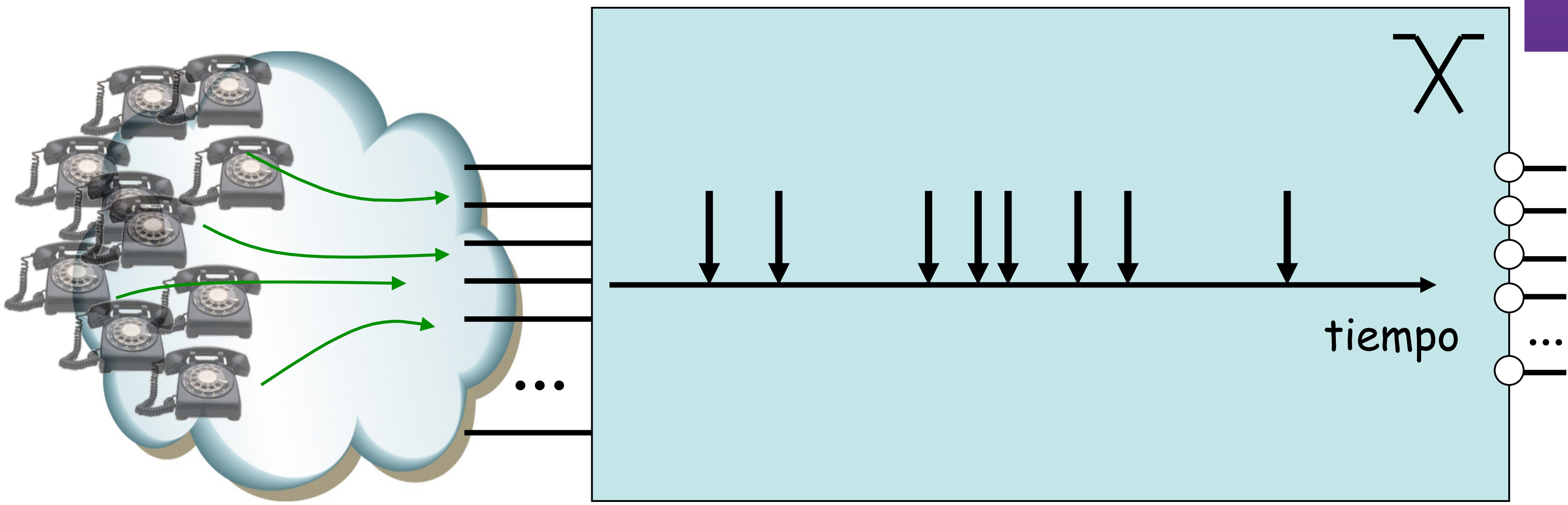
- Una familia de variables aleatorias

$$\left\{X_t : t \in T\right\}$$

- Hablaremos de
  - "Tiempo continuo" cuando T es real, por ejemplo T = [0,∞]
  - "Tiempo discreto" cuando T es numerable, por ejemplo T = {0,1,2…}

Proceso de llegadas

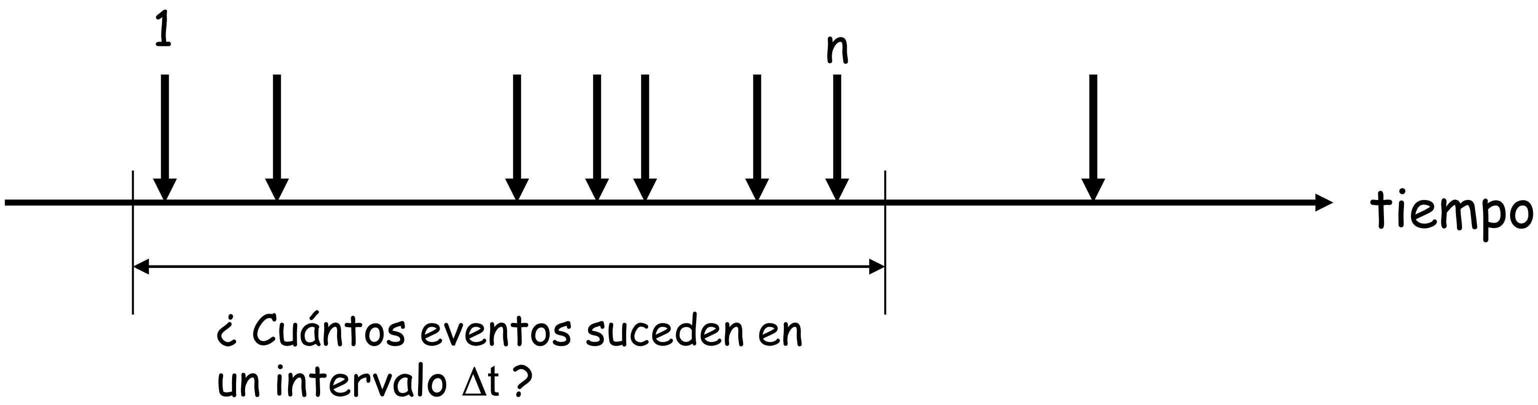
- Hipótesis fundamental en teoría clásica: llegadas independientes
- Tasa media de llegadas de llamadas de una gran población de fuentes (usuarios) independientes: λ



Número de llegadas

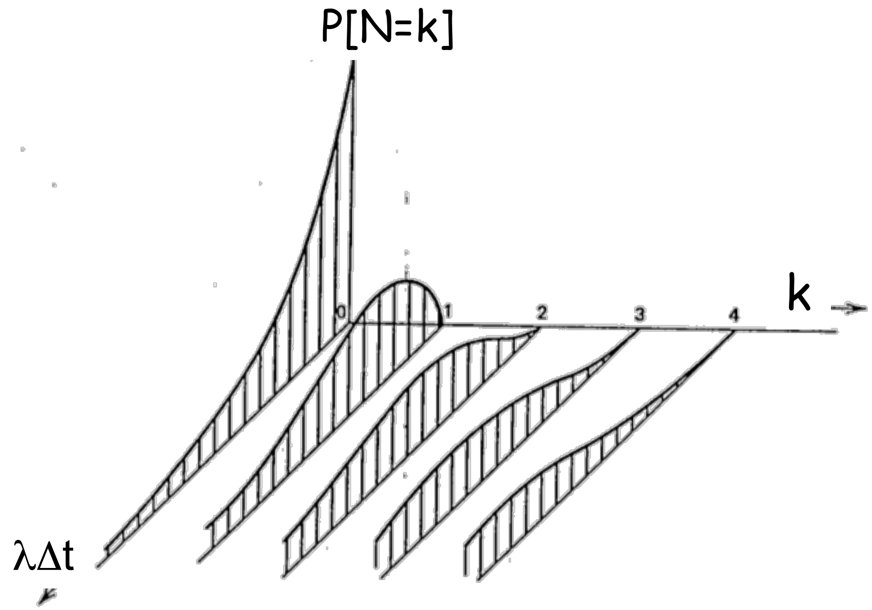
- Hipótesis:
  - En un intervalo suficientemente pequeño solo puede producirse una llegada
  - La probabilidad de una llegada en un intervalo suficientemente pequeño es directamente proporcional a la longitud del mismo (probabilidad $\lambda\Delta t$)
  - La probabilidad de una llegada en un intervalo es independiente de lo que suceda en otros intervalos
- Se demuestra que el número de llegadas en un intervalo sigue una distribución de Poisson

$$\boxed{P_{\lambda\Delta t}[N=k]=\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}}$$



Distribución de Poisson

$$P[N=k]=\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}$$



- Es una función de distribución:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P[N=k]=\left(1+\lambda\Delta t+\frac{(\lambda\Delta t)^2}{2}+\frac{(\lambda\Delta t)^3}{6}+\ldots\right)e^{-\lambda\Delta t}=e^{\lambda\Delta t}e^{-\lambda\Delta t}=1$$

- Su valor medio es $\lambda\Delta t$:

$$\overline{N}=E[N]=\sum_{k=0}^{\infty}kP[N=k]=\left(0+\lambda\Delta t+(\lambda\Delta t)^2+\frac{(\lambda\Delta t)^3}{2}+\frac{(\lambda\Delta t)^4}{6}\ldots\right)e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t e^{\lambda\Delta t}e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t$$

Tiempos entre llegadas

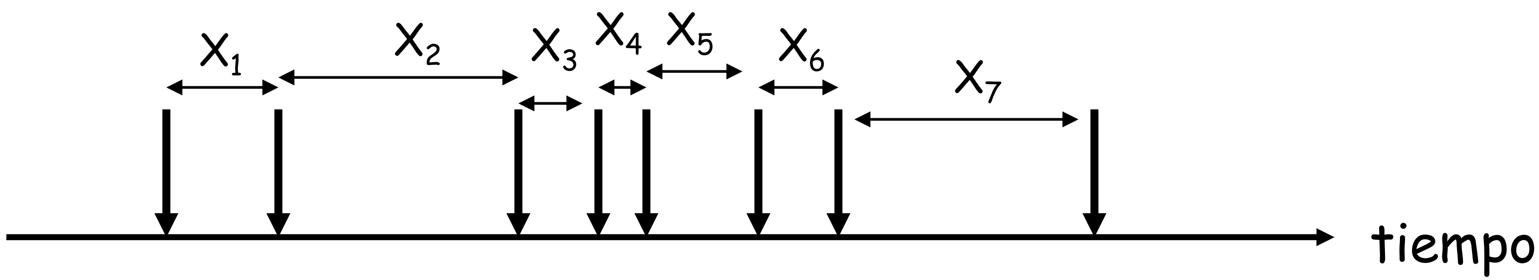
- Se demuestra que: si el número de eventos que ocurren en un intervalo sigue una distribución de Poisson los tiempos entre llegadas de eventos siguen una distribución exponencial
- El tiempo entre llegadas sigue una v.a. exponencial de parámetro λ
- X_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) (‘X’)

$$\boxed{p_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{(t>0)}}$$

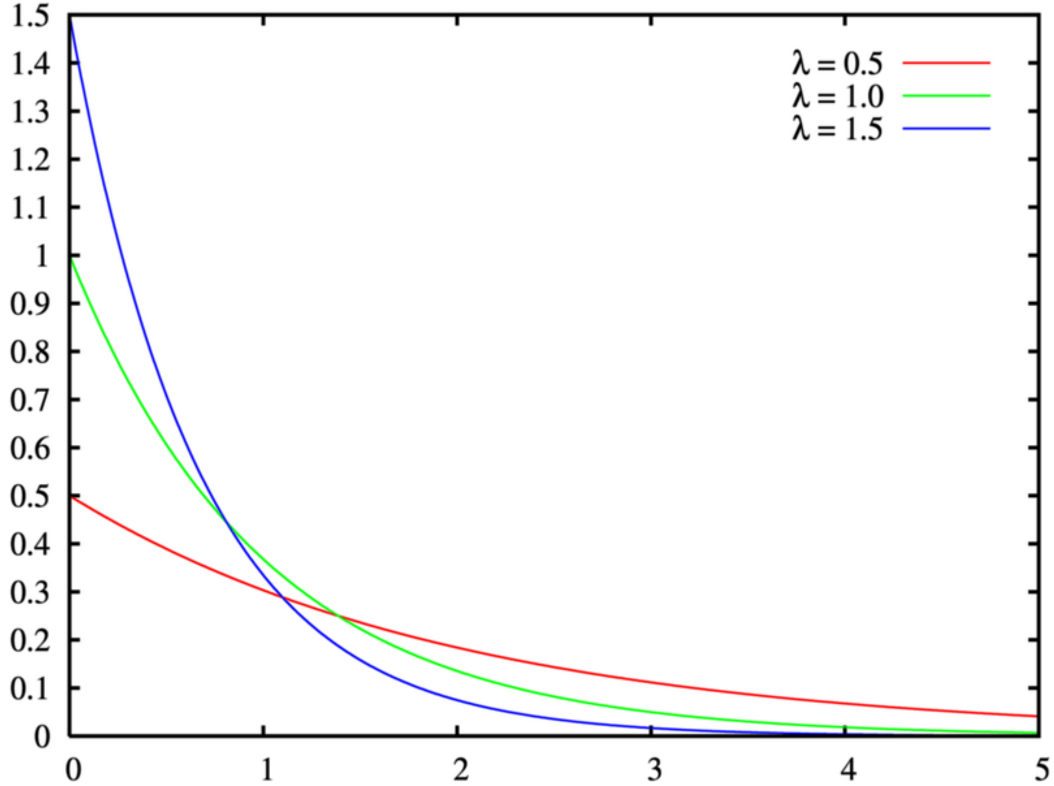
$$P[X < t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

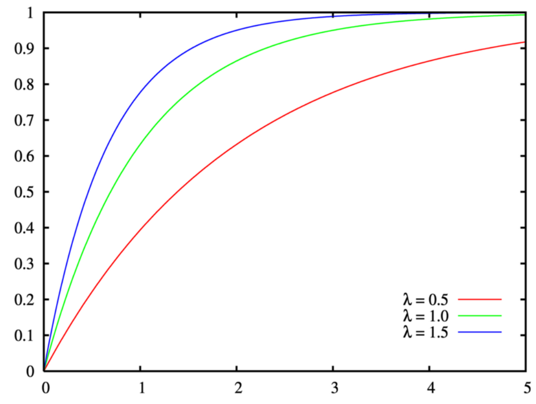
- Media: $E[X] = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} = 1/\lambda$

- Tiempo medio entre llegadas 1/λ ⇒ en media λ llegadas por segundo

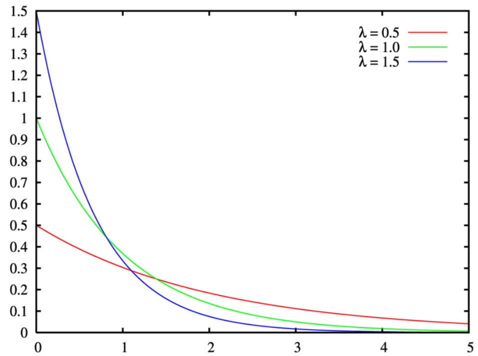


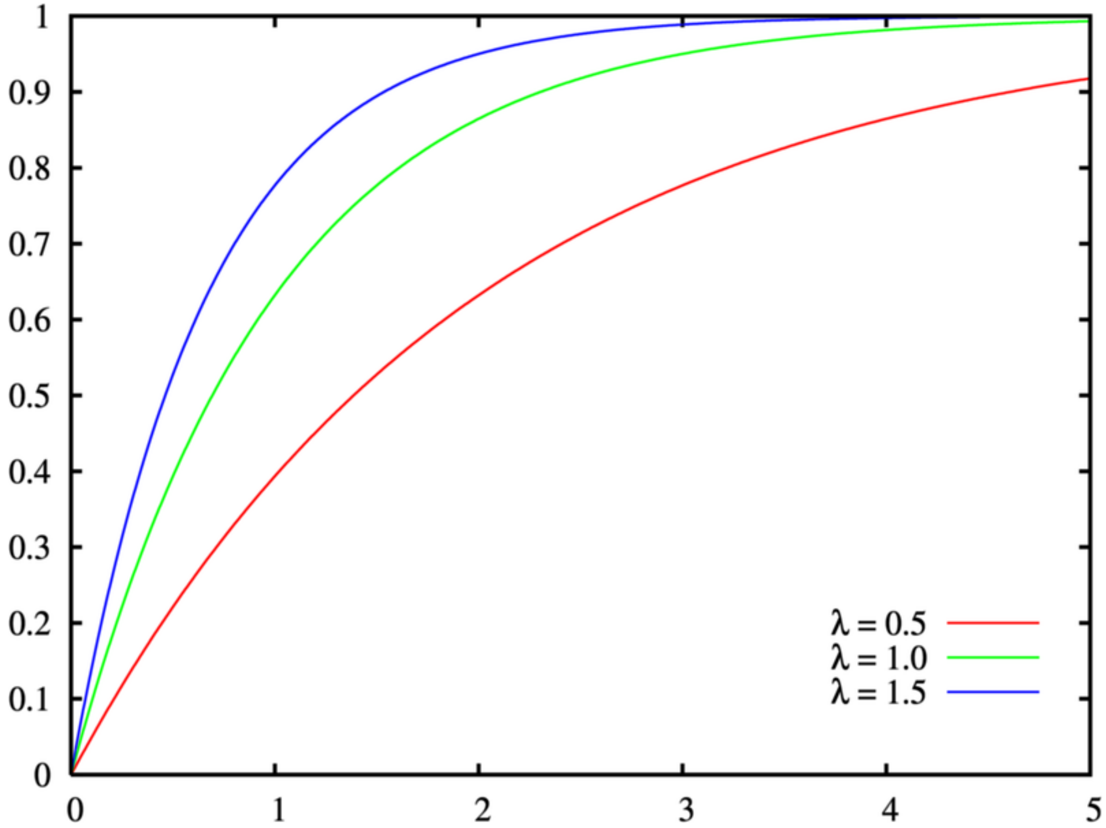
Ejemplo (exponencial)



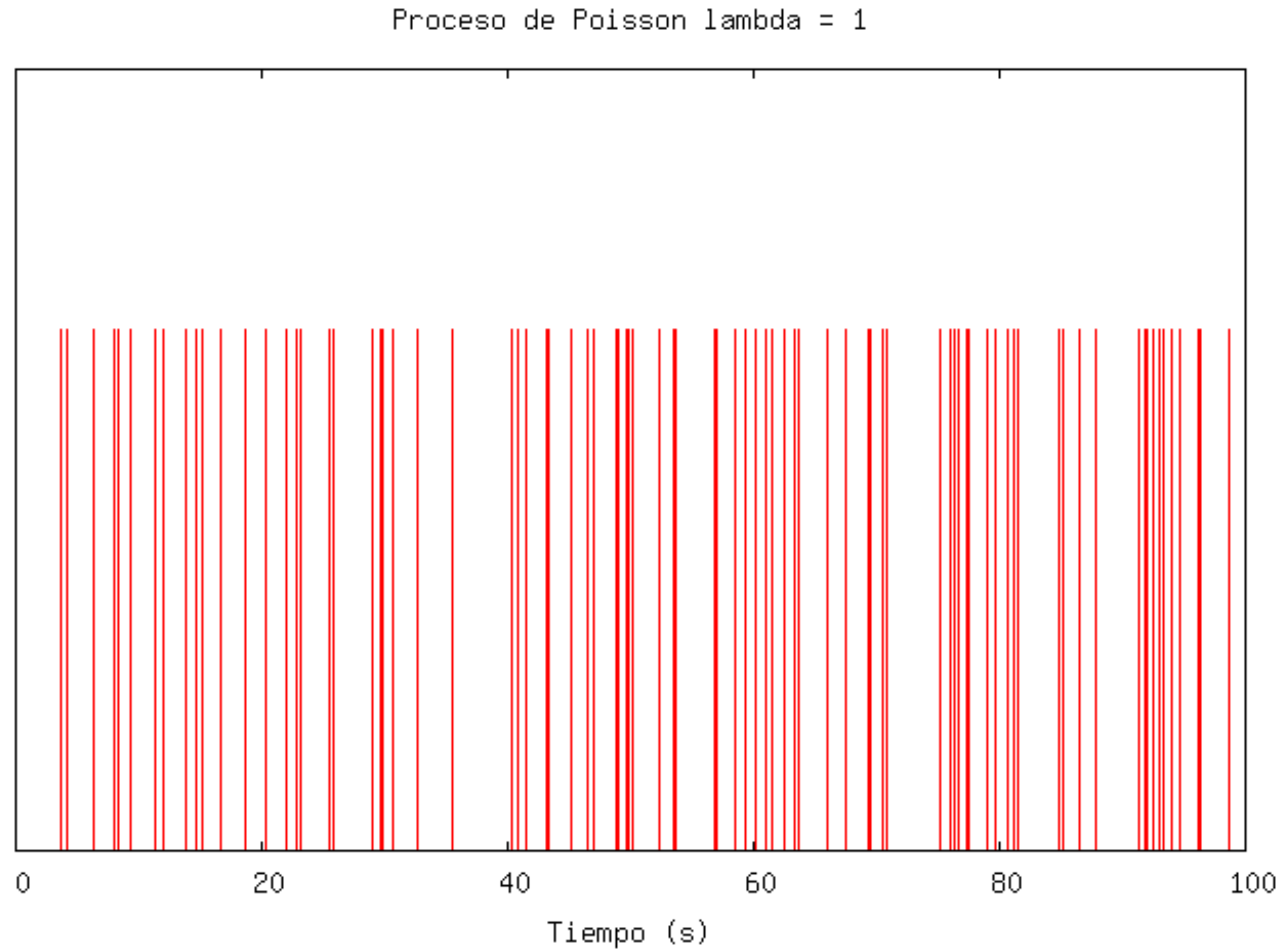


Ejemplo (exponencial)



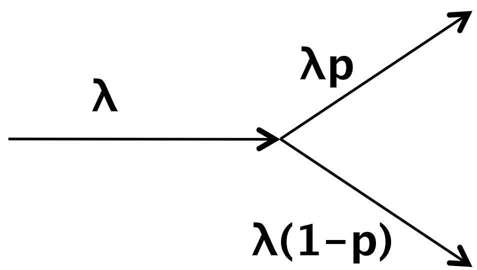


Ejemplo (proceso de Poisson)



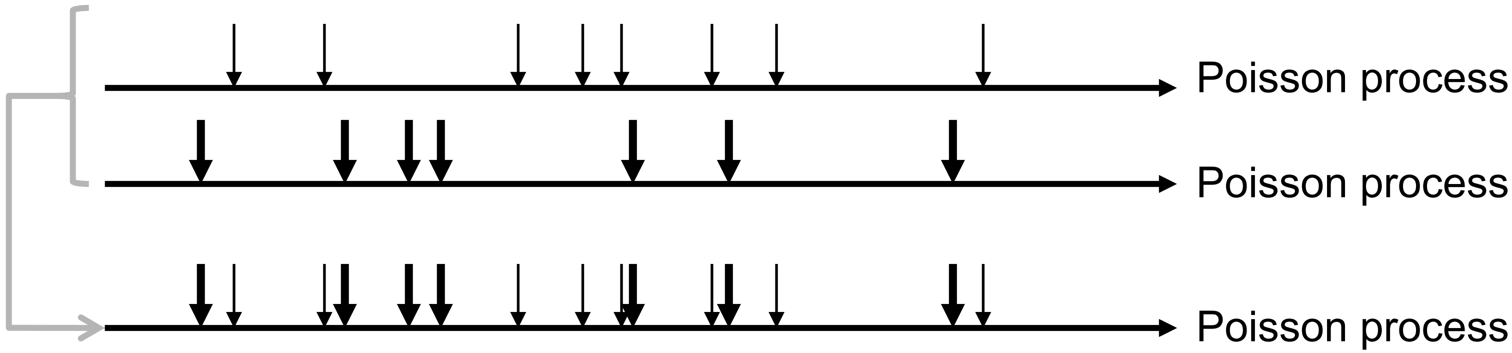
Random splitting

- Proceso de Poisson con tasa λ
- Repartidas las llegadas en dos grupos mediante Bernoulli de parámetro p
- Los procesos resultantes son procesos de Poisson de tasas λp y λ(1-p)

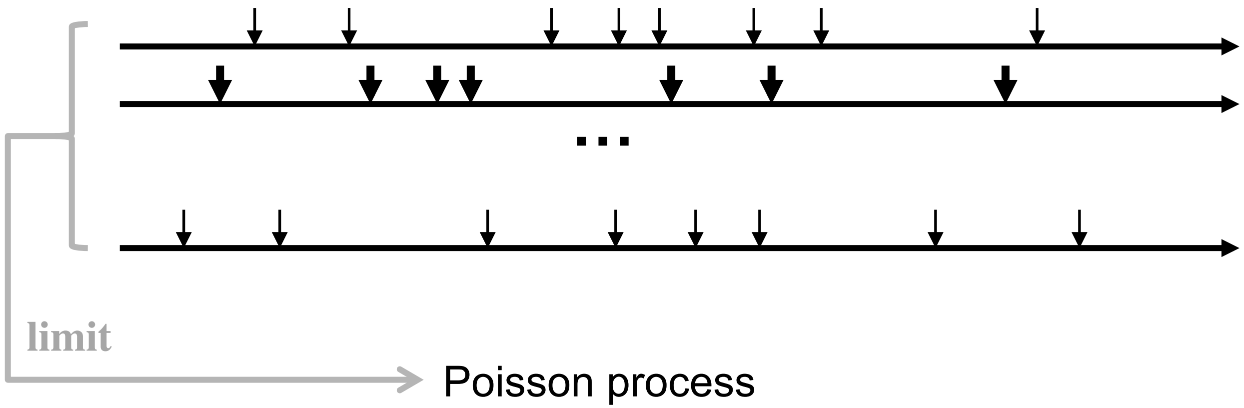


Superposición

- La superposición de dos procesos de Poisson es un proceso de Poisson de tasa la suma de las dos



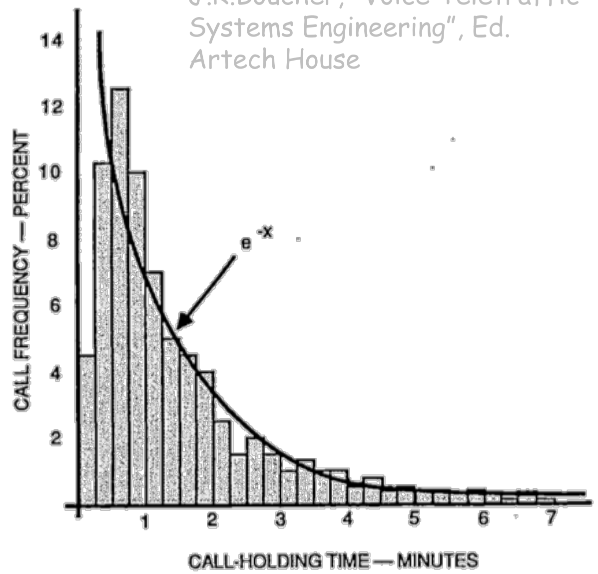
- Para ciertos procesos muy comunes (independientes), la superposición de un grán número de ellos tiende a un proceso de Poisson



Tiempo de ocupación

- Duración de las llamadas
- Lo más simple: tiempo constante
  - Poco realista para llamadas
  - Actividades automáticas: reproducción de mensajes, procesado de señalización, etc.
- Tiempo exponencial
  - Variables aleatorias (continuas) 's_i'
  - i.i.d. ('s')
  - Tiempos menores de la media muy comunes
  - Cada vez menos comunes tiempos mayores que la media
  - Propiedad: el tiempo restante de una llamada es independiente de lo que haya durado hasta ahora
- Duración exponencial: 's' caracterizada por su función de densidad

J.R.Boucher, "Voice Teletraffic Systems Engineering", Ed. Artech House



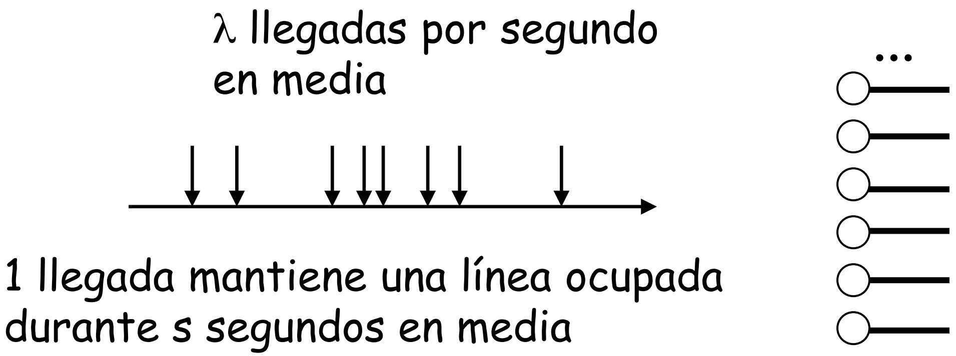
$$p_s(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad \text{(t>0)}$$

$$\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} = 1$$ es una fdp

$$\bar{s} = E[s] = \frac{1}{\mu}$$

Intensidad de trafico

- Infinitas líneas
- Llamadas que se generan con una tasa media λ
- Tiempo medio de duración s
- ¿ Intensidad de tráfico que representan ?

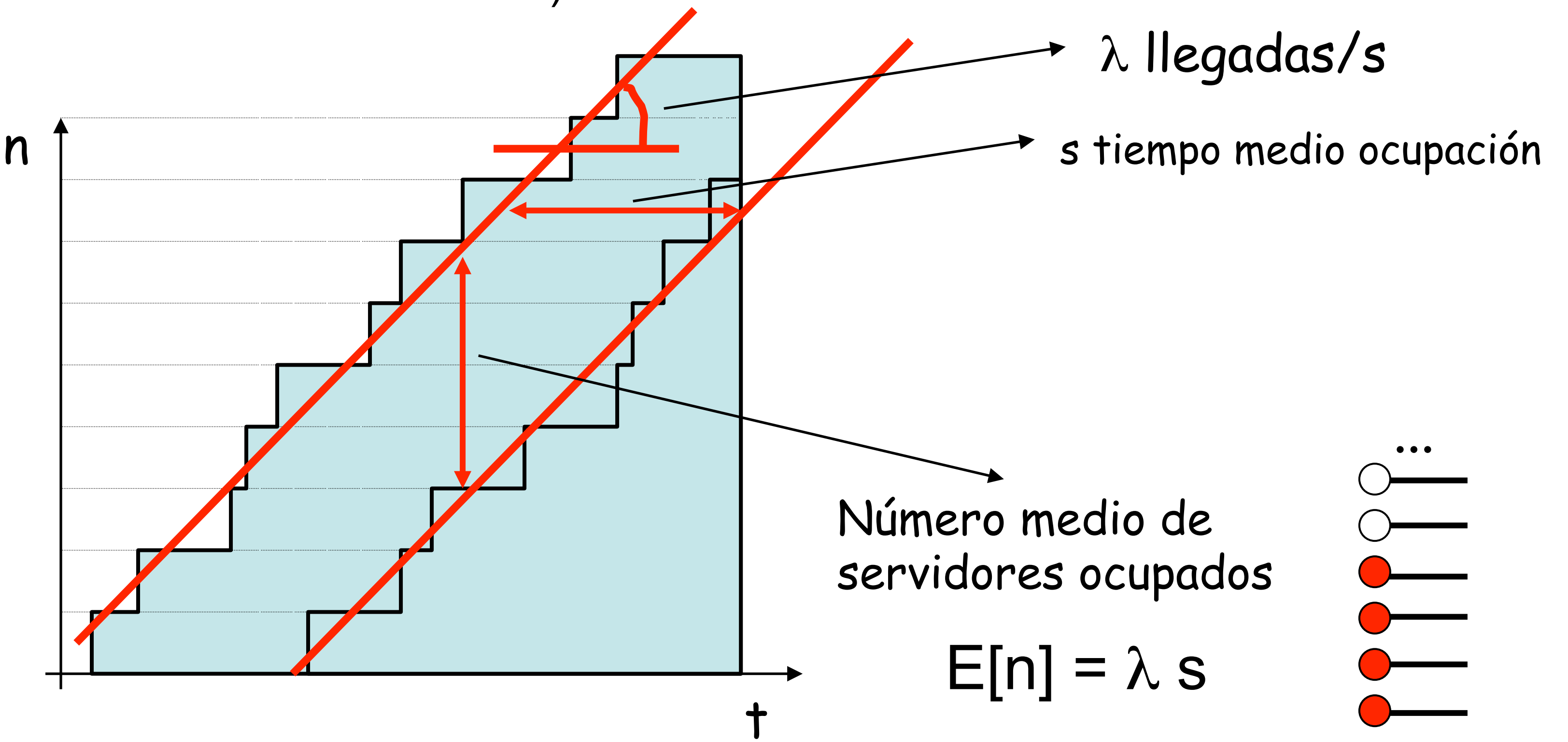


upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ARQUITECTURA DE REDES, SISTEMAS Y SERVICIOS
Área de Ingeniería Telemática

Intensidad de trafico

- $E[n] = \lambda s$
- Esto es conocido como la Fórmula de Little
- λs
  - Es el tráfico medido en Erlangs
  - Equivalente al número de recursos que se ocuparían en el sistema con esa carga si el sistema tuviera infinitos recursos (condiciones de servicio ideales)



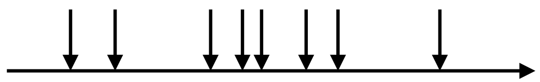
Número de líneas ocupadas

- Hipótesis:
  - Llamadas proceso de **Poisson** con tasa λ
  - Solicitudes de servicio de duración **constante** ‘s’
- ¿ Número de líneas ocupadas en un instante cualquiera ?
  - Es una variable aleatoria
  - La probabilidad de que ‘j’ líneas estén ocupadas en un instante es la probabilidad de ‘j’ llegadas en el intervalo previo de duración ‘s’
  - Depende solo de la intensidad de tráfico λs, que es la media de esta variable (A = λs)
  - Resulta ser válido independiente de la distribución de ‘s’ (sin demostración)

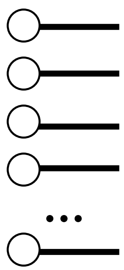
Intensidad de tráfico

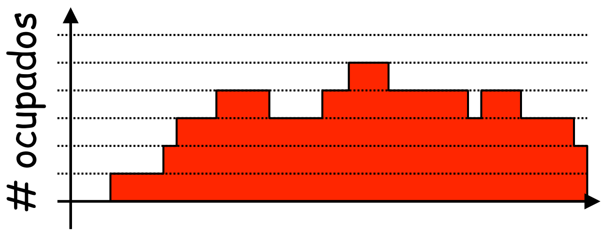
$$P_{\lambda s}[N = j] = \frac{(\lambda s)^j}{k!} e^{-\lambda s}$$

λ Llegadas
por segundo



1 llegada mantiene una línea ocupada
durante s segundos



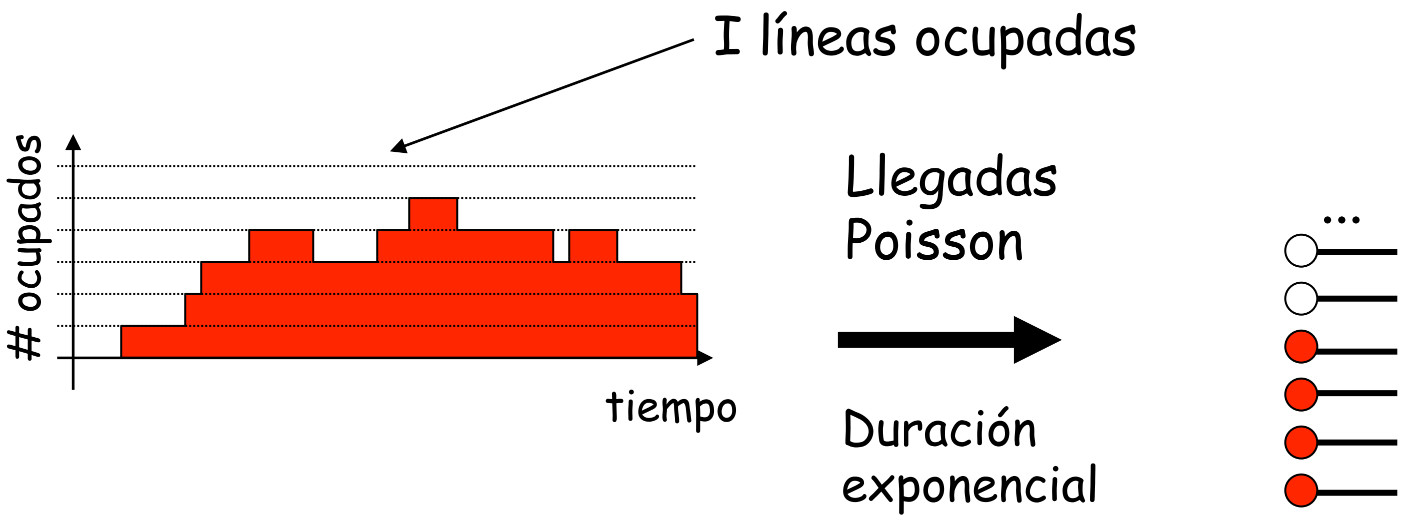


Recursos finitos

- Normalmente dispondremos de recursos finitos (capacidad)
- Problemas de interés
  - ¿ Cuál es la probabilidad de que una llamada encuentre el sistema ocupado ?
  - ¿ Cuál es el número de líneas necesarias para una probabilidad objetivo ?
  - ¿ Cuál es el tráfico que atraviesa ese sistema y forma la carga del siguiente sistema ?

Probabilidad de bloqueo

- Llegadas según proceso de Poisson de tasa λ
- Duración exponencial de media s
- Variable aleatoria (o más bien proceso aleatorio)
  - I número de servidores ocupados en cada instante de tiempo
  - La intensidad de tráfico es E[I] = A = λs

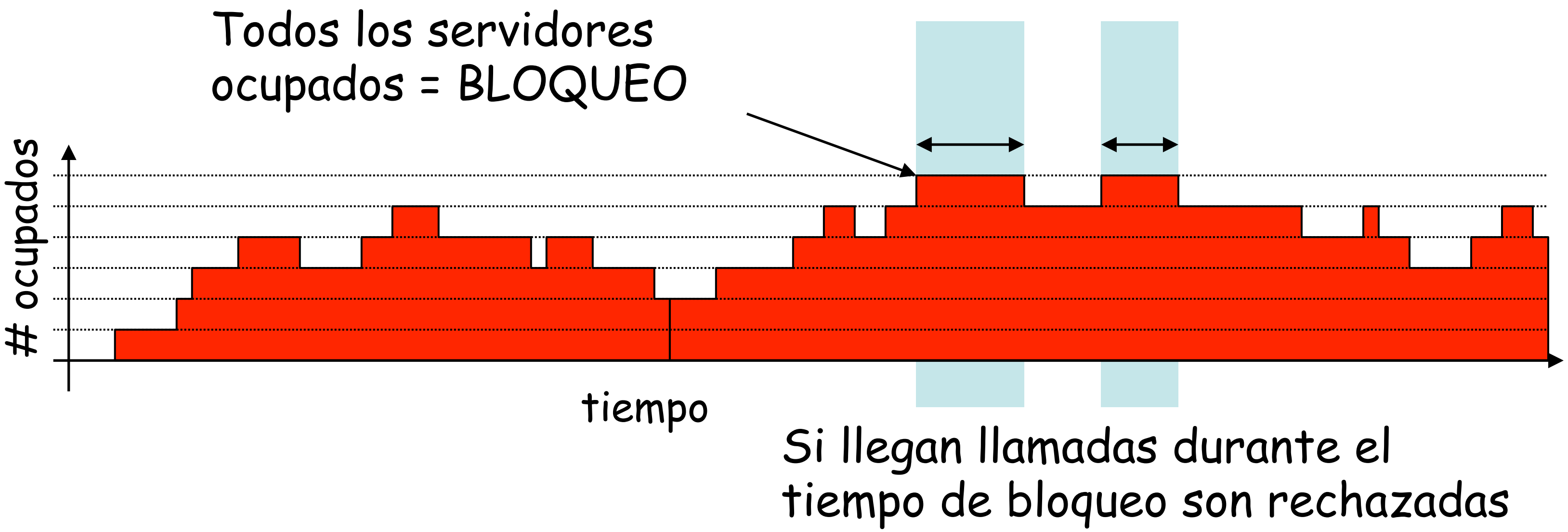


upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ARQUITECTURA DE REDES, SISTEMAS Y SERVICIOS
Área de Ingeniería Telemática

Probabilidad de bloqueo

- Cuando la variable `I` toma valor = número de servidores el sistema está en BLOQUEO
- ¿ Cuál es la probabilidad de que el sistema esté en situación de bloqueo ?



Probabilidad de bloqueo

- En un sistema con
  - Llegadas Poisson(λ)
  - Duraciones Exp(1/s)
  - Tráfico de entrada A = λs
  - k servidores
  - Las llamadas que llegan al sistema bloqueado se pierden
  - Probabilidad de bloqueo: ¿Cuál es P[I=n]? (…)
- P[I=n] = B(a,k)
- B(a,k) es conocida como función B de Erlang (o ErlangB)
- Válida con cualquier distribución de tiempo de servicio (i.i.d.)

B de Erlang

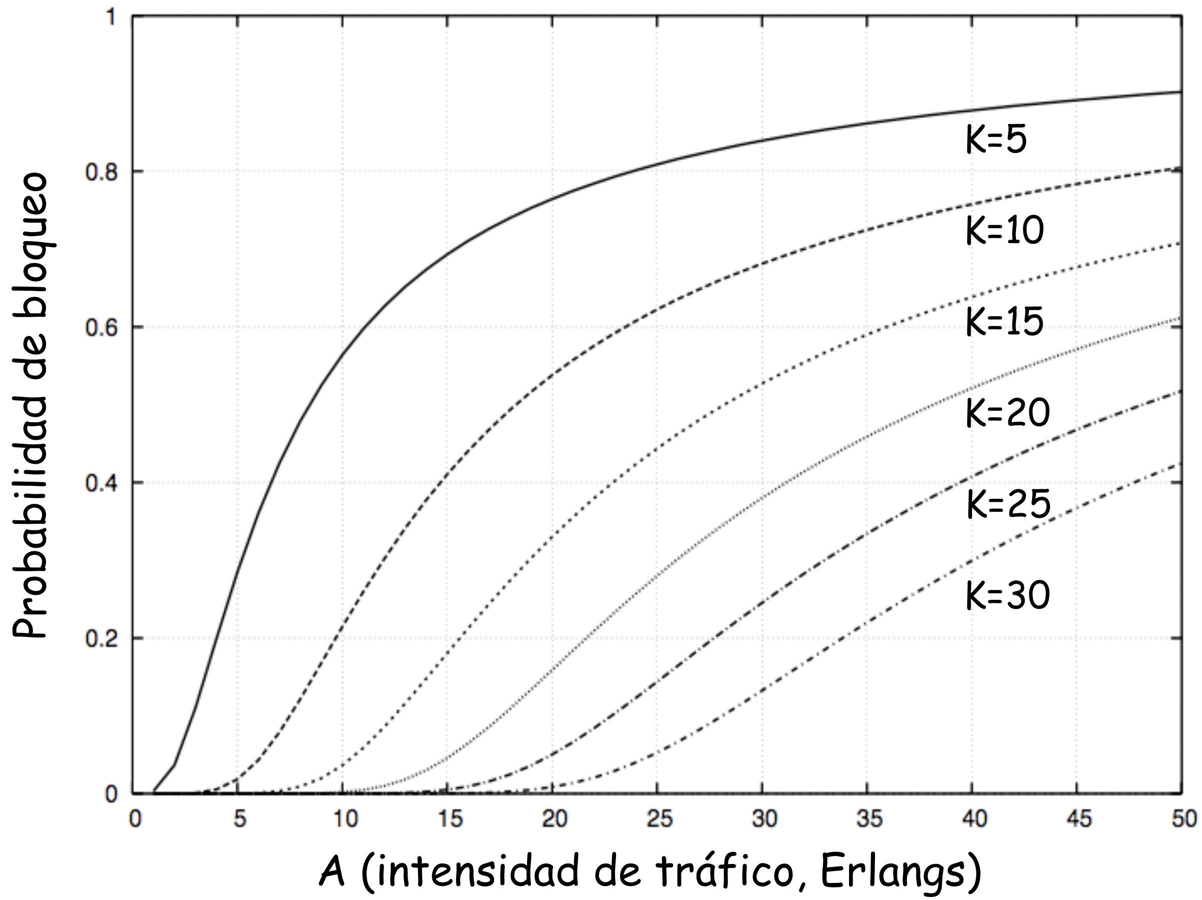
- Fórmula:

$$B(A,k) = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{k} A^i / i!}$$

- Cálculo recursivo:

$$B(A,0) = 1$$

$$B(A,j) = \frac{A \cdot B(A,j-1)}{A \cdot B(A,j-1) + j}$$



Tráfico cursado

- Si un conjunto k de líneas tiene un tráfico ofrecido de I Erlangs y una probabilidad de bloqueo, ¿cuánto tráfico atraviesa las líneas?

  Esto será el **tráfico cursado** y será a su vez el tráfico ofrecido al siguiente sistema al que lleguen las líneas

  $$I_c = I_{in}\,(1 - P_b) = I_{in}\,(1 - B(I_{in}, k))$$

  I_c : tráfico cursado

  I_{in} : tráfico ofrecido o de entrada

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

ARQUITECTURA DE REDES, SISTEMAS Y SERVICIOS
Área de Ingeniería Telemática

Tráfico de desbordamiento

- No puede ser cursado por el camino principal (por bloqueo)
- Se "desborda" (overflow) a una ruta secundaria
- Un proceso de Poisson del que se eliminan aleatoriamente (iid) muestras con probabilidad p sigue siendo un proceso de Poisson, pero con menor tasa ($p\lambda$)
- En nuestro caso las llamadas desbordadas suelen ir en bloques
- Eso da mayores probabilidades de bloqueo que con un proceso de Poisson de igual media
- Se aproxima con un proceso de Poisson de mayor tasa
- (En los problemas en caso de no disponer de las tablas emplearemos Poisson de igual tasa, aunque esto es subdimensionar)