PROBLEMAS DE SISTEMAS DE COLAS

Problema 1 (Kleinrock 3.2)
Considere un proceso de nacimiento y muerte que verifique:

$\lambda_k = \alpha^k \lambda \qquad k \geq 0, \; 0 \leq \alpha < 1$
$\mu_k = \mu \qquad k \geq 1$

a) Halle la probabilidad de equilibrio p_k de que se encuentren k clientes en el sistema. Déjelo en función de p_0 .
b) Dé una expresión para p_0 .

Problema 2 (Kleinrock 3.4)
Considere un sistema M/M/1 con parámetros λ, μ donde los clientes son bastante impacientes. Es decir, tras su llegada los clientes estiman su tiempo de espera en cola, W, y se incorporan a la cola con una probabilidad $e^{-\alpha w}$ (o abandonan el sistema con una probabilidad $1 - e^{-\alpha w}$). El valor de la estimación es el siguiente: $w = k/\mu$, siendo k el número de clientes que se encuentra en el sistema el nuevo cliente que acaba de llegar. Se asume $\alpha \geq 0$.

a) Halle la probabilidad de equilibrio p_k de hallar k clientes en el sistema en función de p_0. Dé una expresión de p_0 en función de los parámetros del sistema.
b) Estudie la estabilidad de este sistema y las condiciones que debe verificar (por ejemplo $p_0 > 0$).(Se mantiene la solución en equilibrio)
c) Para $\alpha \rightarrow \infty$. Calcule p_k y N (numero medio de clientes en el sistema)

Problema 3 (Kleinrock 2.18)
Un peluquero abre su negocio en t = 0. Se puede indicar que los clientes llegan según un proceso de Poisson, tal la fdp es $a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$. Cada corte de pelo dura X sg.(siendo X una variable aleatoria). Calcule la probabilidad P tal que el segundo cliente que vaya no tenga que esperar. Calcule también W, el valor medio del tiempo de espera en cola en los siguientes casos:

i) X = c = constante.
ii) X es una v.a. exponencialmente distribuída con fdp: $b(x) = \mu e^{-\mu x}$

Problema 4 (Kleinrock 2.19)
En el instante de tiempo t = 0 el cliente A realiza una petición de servicio y encuentra los m servidores ocupados y n clientes esperando delante de él en la cola. Los clientes son atendidos en el servicio según una disciplina FCFS. Resultando que no se permite ninguna llegada más al sistema tras t = 0. Asumiendo que los tiempos de servicio son mutuamente independientes, idénticos y están exponencialmente distribuidos (v.a.) con una duración media de $1/\mu$.

a) Calcule el tiempo de espera(valor esperado) en cola del cliente A antes de ser servido.
b) Calcule el tiempo(valor esperado) que transcurre desde el instante t = 0, llegada del cliente A, hasta que el sistema queda totalmente vacío(todos los clientes ya han sido atendidos).
c) Sea X la v.a. que define el orden de finalización del servicio del cliente A: es decir, si X = k, indica que A finaliza en k-ésimo lugar tomando como origen t = 0. Halle P[X = k] tal que (k = 1,2,3, ... , m+n+1).
d) Halle la probabilidad que el cliente A complete su servicio antes que el cliente que le antecede en la cola (el que era el último del sistema justo antes de incorporarse el cliente A).

Problema 5 (ETSIT-UPM)
El tráfico a un centro de conmutación de mensajes para una de las líneas de salida, llega según un patrón aleatorio de media 240 msg/min. Siendo la capacidad de la línea de transmisión 800 caracteres/sg. Se considera que la distribución de la longitud del mensaje es exponencial con una longitud media de 176 caracteres.

Calcule:
1. W, Q, N y T, suponiendo un número muy grande de buffers para mensajes.
2. Suponga que se desean colocar sólo suficientes buffers para que la probabilidad de que todos estén llenos en un determinado instante sea 0,005. Calcule ese número k de buffers y repita los cálculos del apartado anterior.

Problema 6 (ETSIT-UPM)

Los usuarios de una población infinita demandan poissionianamente con tasa "0,1 demandas/unidades de tiempo" de un recurso que no tiene cola con un cierto numero de servidores idénticos de media 2 unidades de servicio.
Se desea garantizar que el tiempo medio de respuesta no sea superior a 10 sg para al menos el 80% de los usuarios. Además no se quiere perder más del 15 % de los usuarios.

Calcule:
a. Capacidad que deben tener los servidores
b. ¿Cuántos servidores ha de tener el recurso?
c. ¿Cuántos servidores están desocupados en media?

Problema 7 (ETSIT-UPM)

Una población infinita de usuarios genera tareas según la ley poissioniana a un ritmo de una tarea por segundo, que requiere un servicio de distribución exponencial que en media vale "s". Se trata de comparar:

1. Un sistema que no admite cola con dos subestaciones en paralelo. Cada una de ellas con velocidad de procesado "s" unidades de servicio/sg.
2. Un sistema de cola limitada a una tarea con una estación de velocidad de procesado "s/0,6404" unidades de servicio/sg .
Ambos sistemas pueden recibir dos usuarios.

Calcule:
a) Probabilidad de pérdidas y throughput en ambos sistemas
b) Calcule el factor de utilización en ambos sistemas
c) Comente los resultados de los apartados anteriores
d) Tras calcular W y T en ambos sistemas, elija uno desde el punto de vista de usuario.
e) Suponga que los ingresos por explotacion del sistema son proporcionales al throughput y que los gastos son proporcionales a la capacidad de procesado. Elija uno desde el punto de vista del explotador.

Problema 8 (Gallager 3.1)

Los clientes llegan a un restaurante de comida rápida con una tasa de 5 por minuto y el tiempo que esperan hasta recibir el pedido realizado es en media de 5 minutos. La mitad de los clientes se queda a comer en el restaurante y el resto recoge la comida y abandona el local. Una comida requiere una media de 20 minutos. ¿Cúal es el número medio de clientes en el restaurante?

Problema 9 (Gallager 3.5)

Un profesor despistado convoca a dos alumnos a la vez. La durac ión de las citas son independientes y están exponencialmente distribuídas con media 30 minutos. El primer estudiante llega puntual y el segundo cinco minutos tarde. ¿Cúal es el tiempo esperado entre la llegada del primer estudiante y la partida del segundo?

Problema 10 (Gallager 3.6)

Una persona entra en un banco y encuentra las cuatro ventanillas ocupadas atendiendo clientes. No hay mas personas en el banco, así esta persona será atendida tan pronto como una ventanilla quede libre.

Los clientes tienen una distribución de tiempo de servicio independiente, idéntica y exponencial.

1. ¿Cúal es la probabilidad que esta persona será la última en abandonar el banco asumiendo que no llegan mas clientes?
2. Si el tiempo medio de servicio es un minuto. ¿Cúal es el tiempo medio que esta persona permanece en el banco?
3. ¿Cambiaría la respuesta del punto 1 si hubiera clientes esperando en la cola cuando se incorpora esta persona? Siendo la disciplina de cola FIFO.

Problema 11 (Gallager 3.8)

Considere una cadena de paquetes tal que su patrón de llegadas sigue un proceso de Poissonde tasa 10 paq/sg. Si el tiempo entre llegadas entre dos paquetes cualesquiera es menor que el tiempo de transmisión del primero de éstos, se dice que los dos paquetes colisionarían. Halle las probabilidades que un paquete no colisione con su predecesor ni con su sucesor, y que un paquete no colisione con ningún otro paquete asumiendo:

1. Todos los paquetes tienen un tiempo de transmisión de 20 msg.
2. Los paquetes tienen tiempos de transmisión que son independientes y que están distribuidos exponencialmente de media 20 msg. (Utilice los resultados del sistema M/M/∞).

Problema 12 (Gallager 3.9)

Una línea de comunicación capaz de transmitir a una tasa de 50 Kb/sg va a ser utilizada para acomodar 10 sesiones generando cada una de ellas tráfico de Poisson de tasa 150 paq/min. La longitud de los paquetes está exponencialmente distribuída con media 1000 bits.

1. Para cada sesión halle el número medio de paquetes en cola, en el sistema y el retardo medio por paquete utilizando
   a. 10 TDM canales de igual capacidad
   b. Multiplexación estadística.

2. Repita el apartado anterior suponiendo que 5 sesiones transmiten con tasa de 250 paq/min y las otras 5 a 50 paq/min.

Problema 13 (Gallager 3.18)

Unos taxis vacíos pasan delante de una parada, según una distribución de Poisson con una tasa de 2 por minuto y sólo se detienen para recoger a un pasajero si hay uno esperando allí. Los pasajeros llegan a esa parada según una distribución de Poisson de tasa 1 por minuto y esperan por un taxi sólo si hay menos de 4 personas esperando, en caso contrario se marchan y ya no vuelven más. Calcule el tiempo medio de espera de un pasajero que se une a la cola.

Problema 14 (Gallager 3.22)

Un polideportivo tiene 5 pistas de tenis. Los jugadores llegan a las pistas según un proceso de Poisson con una tasa de una pareja por

10 minutos y siguiendo el tiempo de utilización de la pista una distribución exponencial con una media de 40 minutos.

1. Suponga que llega una pareja de jugadores y encuentra todas las pistas ocupadas y otras k parejas esperando para acceder a jugar. ¿Cuánto tiempo deben esperar en media para acceder a una de las pistas?
2. ¿Cuál es el tiempo medio de espera en cola para aquellos jugadores que al llegar encuentran todas las pistas ocupadas?

Problema 15 (ETSIT-UPM)
En un sistema de colas cíclico de población finita con 10 usuarios, un tiempo medio de servicio de 3 segundos y un tiempo medio de meditación de 9 segundos. ¿Cuántos usuarios se pueden añadir al sistema si se desea que el tiempo medio de respuesta que se origine no sea superior al doble del valor que tenía inicialmente?.
Nota: las hipótesis que nos permiten tratar el sistema deben cumplir la metodología de nacimiento y muerte.

Problema 16 (ETSIT-UPM)
En un sistema de colas cíclico de población finita con 3 usuarios, se sabe que el número medio de accesos por unidad de tiempo al sistema de colas es 0,75 . El tiempo que transcurre entre el instante en que un determinado usuario finaliza su servicio y requiere servicio otra vez es de 3 segundos. El tiempo medio de duración de cada servicio es de 1 segundo.

1. Se supone que los dos tiempos aludidos puedan quizás tener distribución exponencial. Verifique que esa hipótesis es falsa.
2. Calcule el tiempo medio de respuesta del sistema (admitiendo ahora la hipótesis inicial) cuando se colocan 7 usuarios más en la fuente y naturalmente 7 posiciones más en la cola.

Problema 17 (ETSIT-UPM)
Dos terminales multimedia acceden a un recurso monoestación, siendo el tiempo medio de respuesta de terminal 1 segundo y el tiempo medio de servicio es de 0,8 segundos, siguiendo ambos tiempos una distribución exponencial. El objetivo es el cálculo del tiempo medio de respuesta y el throughput del sistema.

1. ¿Puede aplicar la aproximación asintótica?

2. ¿Qué es el throughput en este sistema? Calcúlelo.
3. Calcule el tiempo medio de respuesta.
4. Deduciendo previamente las expresiones de las correspondientes probabilidades de estado. ¿Cuál sería la mínima longitud de cola que garantice que la probabilidad de rechazos de accesos sea inferior al 70%?.

Sistemas M/G/1

P 3.1 (Gallager 3.36) Una línea de comunicación capaz de transmitir a una tasa λ de Poisson de 50 Kb/sg va a ser utilizada para acomodar 10 sesiones generando cada una de ellas tráfico de Poisson de tasa 150 paq/min. La longitud de los paquetes no está exponencialmente distribuída, teniendo un 10% una media de 100 bits y de 1500 bits el 90%. Para cada sesión halle el número medio de paquetes en cola, en el sistema y el retardo medio por paquete utilizando 10 TDM canales de igual capacidad. Repita los cálculos utilizando multiplexación estadística. Y según la disciplina:

1. FCFS
2. Non Preemptive

P 3.2 (Gallager 3.37) Una serie de personas llegan a una fotocopiadora con tasa tasa λ de Poisson de 1 por minuto. El número de copias requerido por una persona está uniformemente distribuído entre 1 y 10. Cada copia requiere 3 segundos de tiempo de procesamiento. Hallad el tiempo medio de respuesta del sistema cuando:

1. Una persona utiliza la máquina según una disciplina FCFS.
2. Suponga que las personas que tienen como máximo 2 copias a realizar se les asigna una prioridad mayor que al resto.
    a. Disciplina Non Preemptive
    b. Disciplina Preemptive Resume

P 3.3 Un *sniffer* es un ordenador que recibe paquetes en modo promiscuo de un enlace de comunicaciones. En este enlace hay cuatro niveles de protocolo: enlace, red, transporte y aplicación. Los paquetes circulan por el enlace con tasa λ de Poisson. El sniffer está programado para filtrar paquetes Ethernet, protocolo IP, transporte TCP y puerto destino 80. Cada paquete que lee el sniffer pasa por cuatro filtros correspondientes a los cuatro niveles anteriores. El tiempo que tarde en ejecutarse un filtro es igual a T con probabilidad 1. En el enlace todos los paquetes son Ethernet e IP, pero sólo un 50% son TCP y, de estos últimos, sólo un 50% tienen como puerto destino el 80. Se pide:

1. Media y segundo momento del tiempo de servicio del sniffer.
2. Si el sniffer tiene cola infinita y un paquete no se procesa hasta que se termine de procesar el que tiene por delante en cola. Calcule el tiempo de espera en cola de los paquetes.